UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
PROJETO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
O ARQUIVO DA PROFESSORA ESTELITA ANTONINO DE SOUZA: FONTE PARA A HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO DA PARAÍBA
COORDENADORA DA PESQUISA: FRANCYMARA ANTONINO NUNES DE ASSIS

CATALOGAÇÃO DAS FONTES

SÉRIE: CADERNOS ESCOLARES

REGISTRO SIMPLES

Título	Geometria.
Autora	Estelita Antonino de Assis*
Resumo	Caderno de Geometria. Ginásio Santa Rita, 1949, Areia, Paraíba. Não identifica a série. Contém conteúdo e alguns exercícios de Geometria.
Descrição	O caderno pautado mede 22,5 centímetros de comprimento e 16 centímetros de largura, está com capa. Está preenchido com caneta tinteiro nas cores azul, preto, vermelho e grafite. Contém 70 páginas. Item digitalizado por Raiane Coelho
Data	1949-1950
*Nome de solteira da educadora.	

Geometria

Estelita Antonino de Assis

MARCA REGISTRADA

Geometria dedutiva

1) A geometria dedutiva é a ciencia que construe, a parte dum número mínimo de noções e proposições primarias (indemonstraveis), por meio do raciocinio.

2) Proposição é o enunciado de um juizo qualquer p. ex: Um numero é divisivel por 9, quando a soma dos seus algarismos é divisivel por 9.

Em Matemática há duas espécies de proposições: axiomas e teoremas.

3) Ascioma é a proposição evidente por si mesma chama-se também postulado.

Ex. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si.

4) Teorema é uma proposição que não se torna evidente se não por meio de uma demonstração.

Ex. Os ângulos opostos pelo vértice são iguais.

5) Corolário é uma verdade que resulta de um ou mais teoremas já demonstrados.

6) Um teorema tem duas partes no enunciado: a hipótese e a tese.

A hipótese é a suposição, é o ponto de partida; a tese é a conclusão a que se quer chegar, é aquilo que se pretende provar.

7) A demonstração de um teorema é o trabalho intelectual necessário para provar o que nele se afirma. Parte-se da hipótese, caminhando cautelosamente para alcançar a tese, que se demonstra com o auxílio de definições, axiomas e teoremas anteriormente demonstrados.

I O ponto, a reta e o plano

1º O ponto é o menor espaço que se possa imaginar em comprimento, em largura e em expessura.

2º Linha reta ou simplesmente reta, é o caminho mais curto de um ponto a outro.

3º Plano é uma superficie tal que uma reta possa aplicar-se nela em todos os sentidos.

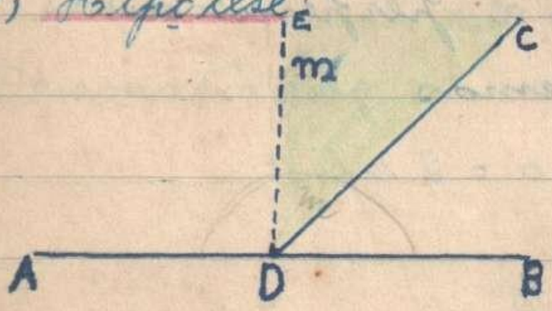
4º Figura geométrica é um conjunto de elementos geométricos, isto é, pontos, linhas, superficies.

5º Lugar geométrico é a figura formada pelo conjunto das posições dum ponto, duma linha ou duma superficie, que se desloca duma maneira continua.

II. Angulos: Teoria - livro, pag. 13

1º Teorema: Dois ângulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha reta, são suplementares.

A, Hipotese:



AD e BD = lados exteriores dos ângulos ADC e BDC

AD e DB estão em linha reta

B) Tese: ADC e BDC = 180º

C) Demonstração: Levantando do ponto D a perpendicular DE à reta AB teremos:

ADC = 90º + m

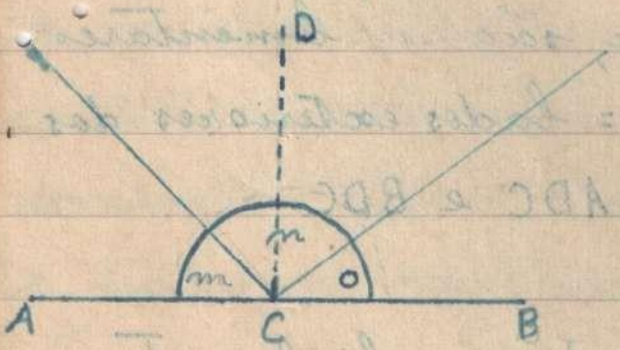
BDC = 90º − m

Logo: ADC + BDC = 90º + m + 90º − m

ADC + BDC = 180º

Corolários:

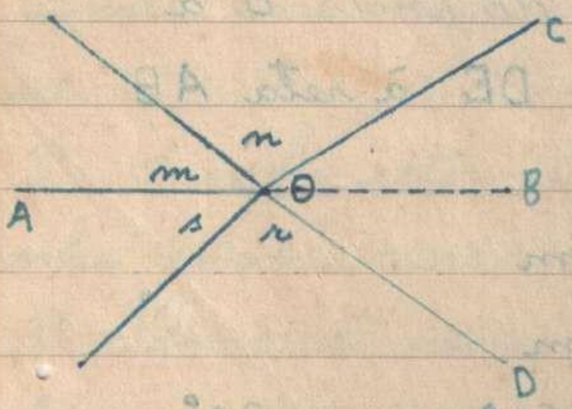
1º A soma de todos os ângulos que se podem formar ao redor de um mesmo ponto, do mesmo lado de uma reta, é igual a dois retos



No ponto C se levantarmos a AB a perpendicular CD, vemos que

$m + n + o = 2$ retos

2º A soma de todos os ângulos que se podem formar ao redor de um ponto é igual a 4 retos



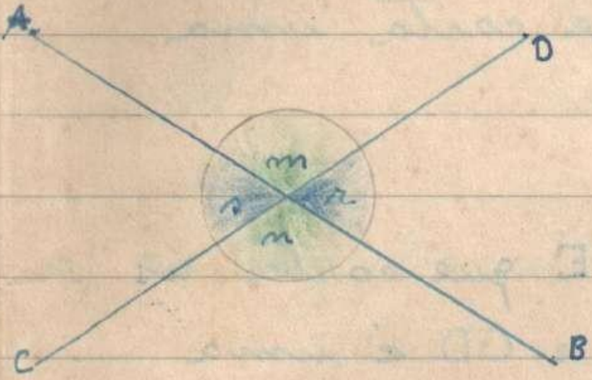
Se prolongarmos a reta AO, podemos escrever, segundo o corolário precedente:

$m + n + BOC = 180°$

$s + r + DOB = 180°$

ex

2º. Teorema: Os angulos opostos pelo vertice são iguais



I **Hipótese**: Os angulos m e n e r e s são opostos pelo vertice e formados pelas retas AB e CD

II **Tese**: m = n; r = s

III **Demonstração**: a) Os angulos m e r são suplementares = 180º pois a linha AB é reta

b) n + r = 180º; são suplementares

c) m+r = n+r pois são iguais entre si valendo cada quantidade 2 retos

Logo: m = n

a) Os angulos s e n são suplementares = 180º; pois a linha AB é reta

b) n + s = 180º são suplementares

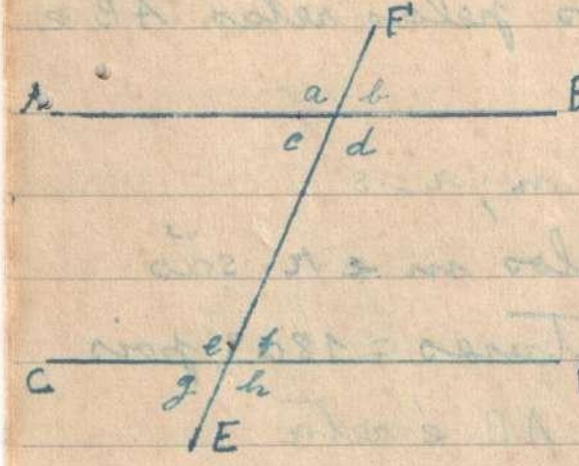
c n + r = n + s pois são iguais entre si valendo cada quantidade 2 retos

d) s = r

ex

III – Teoria das paralelas

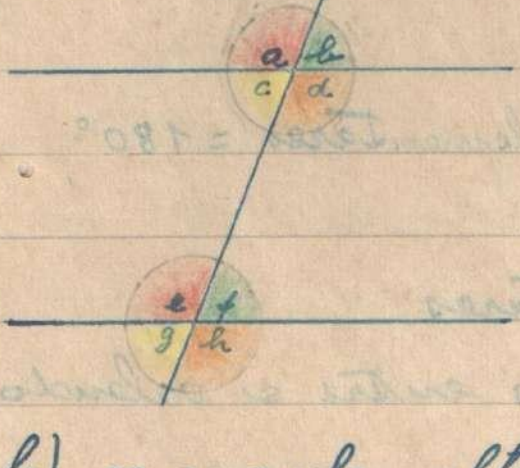
1º Secante é toda a reta que corta uma figura



A reta FE que corta as retas AB e CD é uma secante

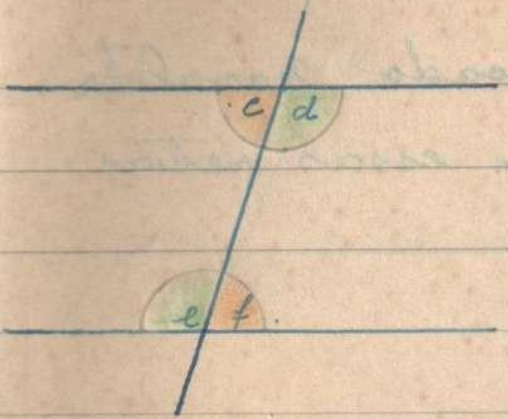
2º Duas retas cortadas por uma secante
ex formam oito angulos, a saber:

a) os angulos correspondentes - situados de um mesmo lado da secante, com aberturas dirigidas no mesmo sentido



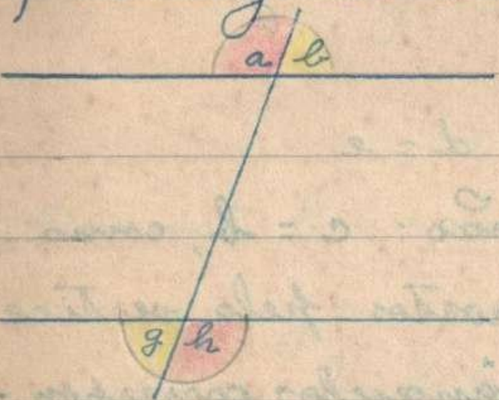
a-e   b-f são angulos
c-g   d-h correspondentes

b) os angulos alternos-internos - situados de parte e de outra da



secante, e colocados ambos
no intérior das duas retas.
Os angulos c-f e d-e são
alternos-internos

c) os angulos alternos-externos situados de parte



e de outra da secante, e colocados ambos no exterior das duas retas.
Os angulos a-h e b-g são
alternos externos

V. G

3º Teoremas:

a) Os angulos correspondentes são iguais

Hipottese: As duas paralelas AB e CD são cortadas pela secante EF

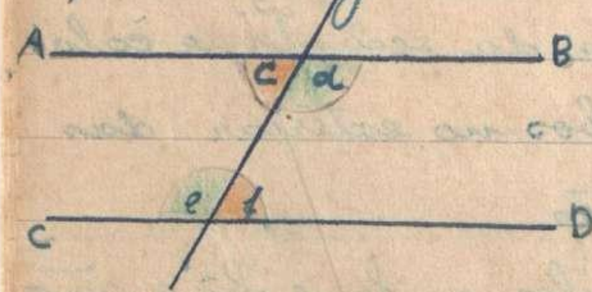
Tese: $a = e$; $b = f$

$c = g$; $d = h$.

Demonstração: As retas AB e CD são paralelas, por isso a secante EF está igualmente inclinada sôbre cada paralela e por conseguinte forma com essas retas angulos iguais.

Logo: $a = e$; $b = f$; $c = g$; $d = h$

3) Os angulos alternos-internos são iguais.



Tese: $c = f$; $d = e$

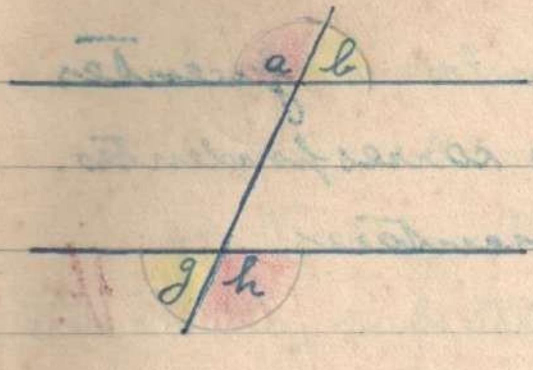
Demonstração: $c = b$, como angulos opostos pelo vertice $f = b$, como ângulos correspondentes.

Logo: $c = f$; quantidades iguais a uma terceira

2) Demonst. $e = h$ como opostos pelo vertice
$d = h$ como angulos correspondentes

Logo: $d = e$; porque duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si

c). Os angulos alternos-externos são iguais



Tese: $a = h$; $b = g$

Demonstração: $a = d$, como angulos opostos pelo vertice

$h = d$, como angulos correspondentes.

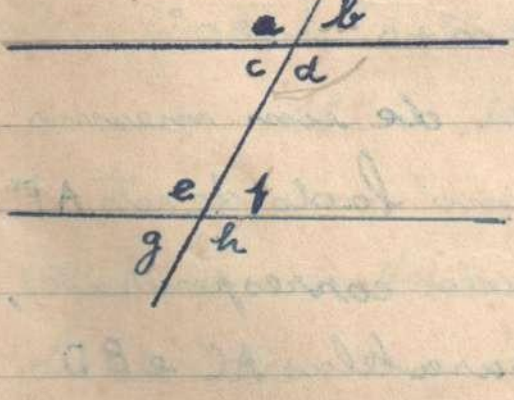
Logo: $a = h$, quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si

2) Demonst. $b = c$, como angulos opostos pelo vertice

$g = c$, como angulos correspondentes

Logo: $b = g$, quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si

d) Os angulos internos situados de um mesmo lado da secante são suplementares



Tese: $d + f = 180°$ e $e + c = 180°$

Demonstração

a) $b + d = 18°$ sendo angulos adjacentes ao lado da reta EF

$b = f$ como angulos correspondentes.

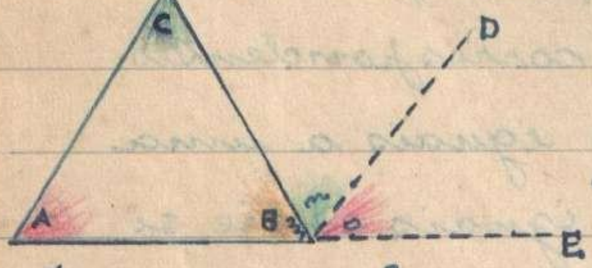
Logo: $d + f = 180°$ - suplementares

b) Demonst. $a + c = 180°$ como angulos adjacentes
e $a = e$ como angulos correspondentes.
Logo: $e + c = 180°$ — suplementares

IV ex Triângulos

1.º Teoria correspondente, livro de Geometria pag. 39

2.º Teorema: A soma dos 3 angulos de um triângulo vale sempre 2 retos ou 180°.



Hipótese: Seja o triangulo ABC

Tese: $A + B + C = 180°$

Demonstração: Traçado a reta BD paralela a AC e prolongando AB em BE, temos:

1) Os angulos $m + n + o = 180°$; estando ao redor de um mesmo ponto e do mesmo lado da reta AE

2) $A = o$; como angulos correspondentes, por causa das paralelas AC e BD e da secante AE.

3) O angulo $C = m$; angulos

alternos internos, por causa das paralelas AC e BD e da secante CB.

4). O angulo $B = m$

Portanto, substituindo os angulos m, n, o pelos angulos que lhes são iguais, temos: $A + B + C = 180°$ ou 2 retos.

III Consequencias: Livro pag. 40 Nº 106

IV Exercicios:

1º Dois angulos de um triangulo escaleno valem, um 37º 18' 25"; e outro 52º 41' 35".
Quanto vale o terceiro?

Solução: Soma dos dois angulos = 37º 18' 25"
+ 52º 41' 35"
89º 59' 60" = 90º

Resposta: O 3º angulo vale
$180° - 90° = 90°$

2º Quanto vale cada um dos angulos da base de um triângulo isósceles, sabendo que o angulo do vértice vale: a) 30º 20'
b) 90º; c) 48º 24'

Solução: Os angulos da base valem
$180° - 30° 20' = 149° 40'$
Resposta: Cada um dos ângulos vale:
$149° 40' \div 2 = \underline{74° 50'}$
Solução b) Os angulos da base valem
$180° - 90° = 90°$
Resposta: Cada um dos angulos vale:
$90° \div 2 = \underline{45°}$
Solução c) Os angulos angulos da base valem:
$180° - 48° 24' = 131° 36'$
Resposta: Cada um dos angulos vale:
$131° 36' \div 2 = \underline{65° 48'}$

3° Quanto vale um dos ângulos agudos de um triângulo retangulo sabendo que o outro vale: a) 60°; b) 75° 15'
c) 83° 19' 47"?
Solução: A soma dos angulos agudos
$= 180° - 90° = 90°$
Resposta: a) Valendo um angulo 60° o outro

vale $90° - 60° = 30°$

Solução b) A soma dos angulos agudos $= 180° - 90° = 90°$

Respostas b) Valendo um angulo $75° 15'$ o outro vale: $90° - 75° 15' = 14° 45$

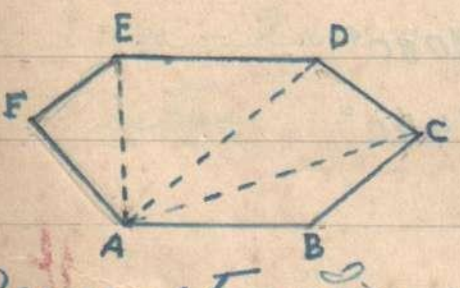
" c) Valendo um angulo $83° 19' 47''$ o outro vale: $90° - 83° 19' 47'' =$ $6° 40' 13''$

V. 10

V Poligonos

ex

Teorema: A soma dos angulos internos de um poligono é igual ao produto de 2 retos pelo numero de lados menos 2



1º Hipotese: ABC... MN é um poligono de n lados.

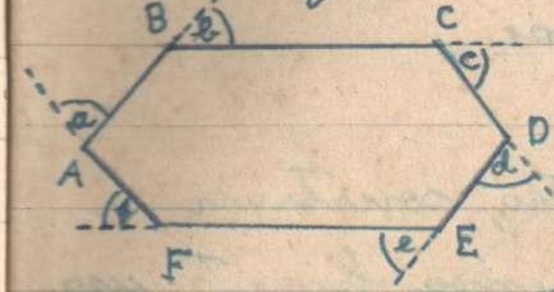
2º Tese: $A + B + C \ldots + M + N = 2r(n-2)$

Demonstração: Se traçarmos, do vértice A, todas as diagonais possiveis, ficará o poligono dividido em, triangulos, todos com o vértice comum A, e cujas bases são os lados do poligono, com exceção dos dois que formam o angulo A.

Dessarte, um poligono de n lados decompõe-se em n-2 triangulos.
Notando que a soma dos angulos internos de cada triangulo é igual a 2 retos temos
$A + B + C \dots + M + N = 2$ retos$(n-2)$
que é a nossa tese.
Designando por S a soma dos angulos, temos:
$S = 2r(n-2)$.
Exercicios: Calcular a soma dos angulos internos dos poligonos seguintes:
1º Quadrilátero $= 2r \times 2 = 4r$ ou $360°$
2º Pentágono $= 2r \times 3 = 6r$ ou $540°$
3º Hexágono $= 2r \times 4 = 8r$ ou $720°$
4º Heptagono $= 2r \times 5 = 10r$ ou $900°$
5º Octógono $= 2r \times 6 = 12r$ ou $1080°$
6º Decagono $= 2r \times 8 = 16r$ ou $1440°$

V.

Teorema: A soma dos angulos externos de um poligono é igual a 4 ângulos retos



I Hipotese: No poligono ABC... MP, a, b, c ... m, p são angulos externos

II Tese: $a + b + c \ldots + m + p = 4r$

III Demonstração: Tendo em vista que são adjacentes os ângulos externos e internos considerados em cada vértice do poligono, resulta:

Soma dos angulos externos e internos = 2 retos × n

$$S = 2rn$$

Mas, como se sabe, que o valor dos angulos internos é $2r(n-2)$, o valor dos externos será

$2.rn - 2r(n-2)$

$S = 2rn - 2rn + 4r$

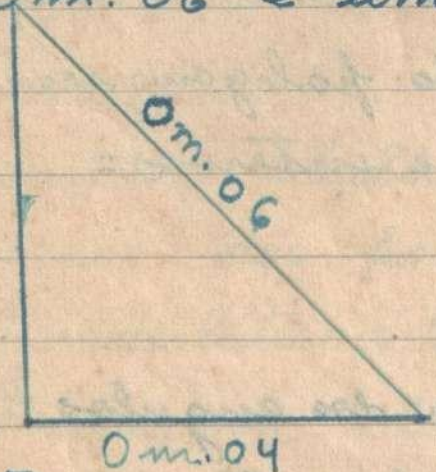
$S = 4$ retos

Ginásio Santa Rita, 27 de Agosto de 1949

Exercicios graficos

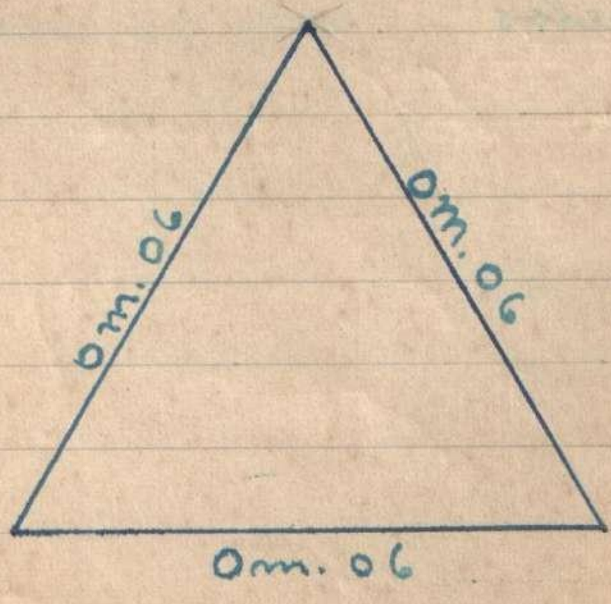
Nº 62

Com o esquadro e o decímetro, construir um triângulo retangulo com uma hipotenusa de 0m.06 e um cateto de 0m.04.

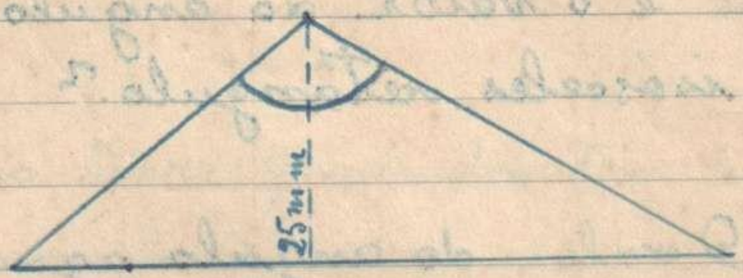


Nº 65

Construir um triangulo equilateral de 0 m. 18 de perimetro.

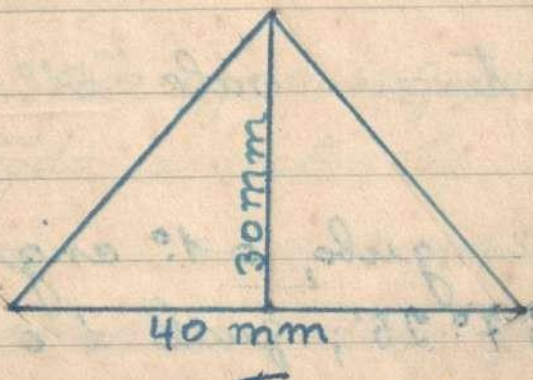


Nº69. Construir um triangulo que tenha 112º no angulo do vertice e 25 mm de altura

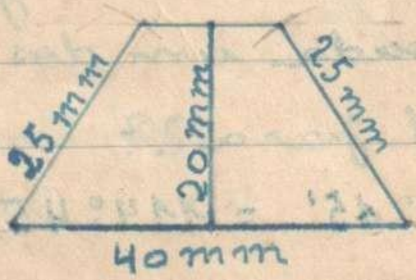


Nº73

Construir um triangulo isósceles que tenha 40 mm. para os lados iguais e 30 mm. de altura



Nº83. Construir um trapezio simetrico de 40 mm. na grande base, 20 mm. na altura e 25 mm. em cada lado não paralelo.



Ginásio Santa Rita, 30 de Agosto de 1949

Nº 86. Qual é o valor do ângulo agudo do triangulo isósceles retângulo?

Resposta: O valor do angulo agudo do triangulo isósceles retangulo é a metade de 90º ou 45º

Nº 88. Dois ângulos de um triangulo valem 71º e 58º; dizer o que vale o terceiro.

Resposta: O terceiro vale 51º

Nº 93. Num triangulo, o 1º angulo vale 75º 15' e o segundo, 57º 25'; qual é o valor do terceiro?

Resposta: O valor do terceiro é de: 47º 20'

Nº 99. Um dos angulos de um triangulo é de 65º 15'; quanto vale cada um dos outros si estão na razão de 1 para 2?

Resposta: 179º 60' − 65º 15' = 114º 45'.

$114°45 \div 3 = 38°15'$

$114°45 - 38°15' = \underline{76°30'}$

Um ângulo vale 38°15' e o outro 76°30'

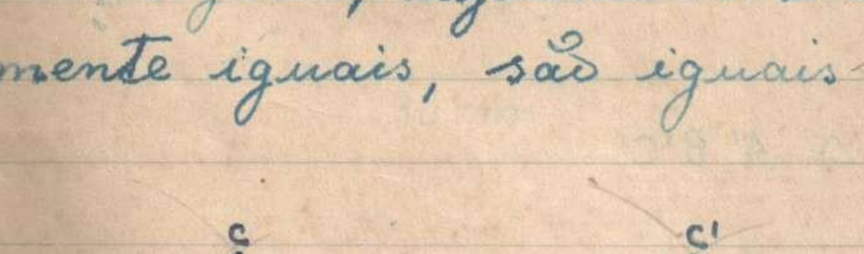
Nº 108. Uma tôrre quadrada tem 6m75 de lado; qual é o perimetro?

Resposta: O perimetro é 6m75 × 4 = 27 m   M. B.

Igualdade de triangulos.

Dois triângulos são iguais quando podem coincidir em tôda a extensão.
Têm mesma forma e mesma superficie

1º Teorema: Dois triângulos que tem um lado igual, adjacente a 2 ângulos respectivamente iguais, são iguais



Hipotese: AB = A'B'

$\hat{A} = \hat{A}'$

$\hat{B} = \hat{B}'$

Tese: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Demonstração: Transportemos o triangulo A'B'C' sobre o triangulo ABC, de modo que os segmentos A'B' e AB coincidam caindo A' sobre A e B' sobre B e que os pontos C e C' fiquem do mesmo lado do suporte de AB.

Sendo os angulos A e A' iguais, A'C' tomará a direção de AC. Como os angulos B e B' também são iguais e do mesmo sentido, B'C' tomará a direção de BC.

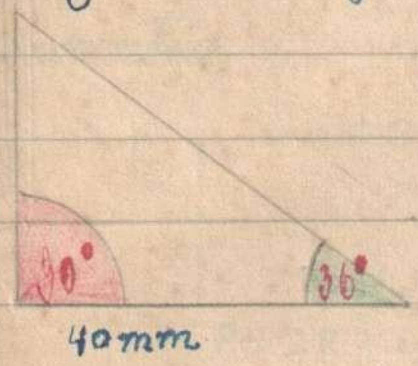
Temos, pois, que C' deve estar simultâneamente sobre os lados AC e BC. Portanto C' coincide com o vértice C, intercessão de AC e BC.

E, como os triangulos considerados coincidem, segue-se que

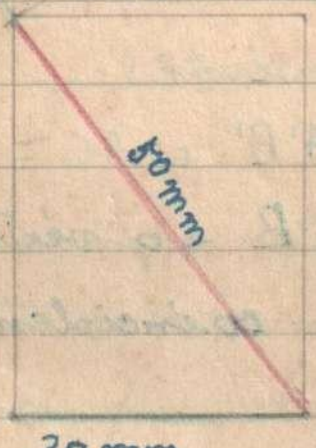
$$\triangle ABC = \triangle A'B'C'$$

Ginásio Santa Rita, 9 de Setembro de 1949

Nº 74 Construir um triangulo de 40mm de base e angulos adjacentes de 36º e de 90º

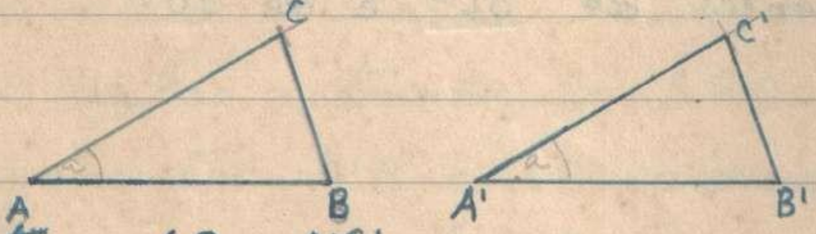


Nº 77 Construir um retângulo de 30mm de base e de 50 mm numa diagonal.



N. 9,7

2º Teorema: Dois triangulos que tem 2 lados respectivamente iguais, e também igual o ângulo por eles compreendido são iguais.



Hipotese: $AB = A'B'$

$AC = A'C'$

$A = A'$

Tese: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Demonstração: Transportemos o triangulo A'B'C' sobre o triangulo ABC de modo que os angulos iguais A e A' coincidam.

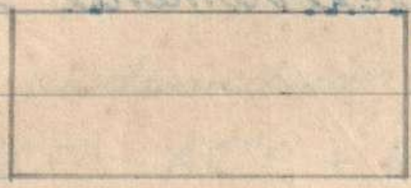
Mas, notando que $AB = A'B'$ e $AC = A'C'$ segue-se que o vertice B' cai sobre B e o vértice C' sobre C.

Os triangulos considerados coincidem, pois.

Logo: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

Ginásio Santa Rita, 16 de Setembro de 1949

N° 111. Qual é o comprimento de um campo retangular de 25.80 de largura e de 284 m.75 de perimetro.



L = 25 m.80

P = 284 m.75

As 2 larguras medem 25 m 80 x 2 = 51 m 60

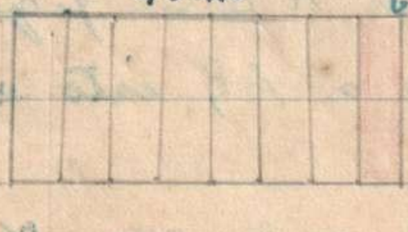
P – 2l = 284 m 75 – 51 m 60

Os 2 comprimentos = 233 m 15.

Um comp. = 233 m 15 ÷ 2 = 116 m 575

N° 117 Um campo retangular tem 48 m de comprimento e 26 m de largura; divide-se em 8 lotes iguais por linhas paralelas à largura; qual é o perimetro de cada lote

48 m   6 m



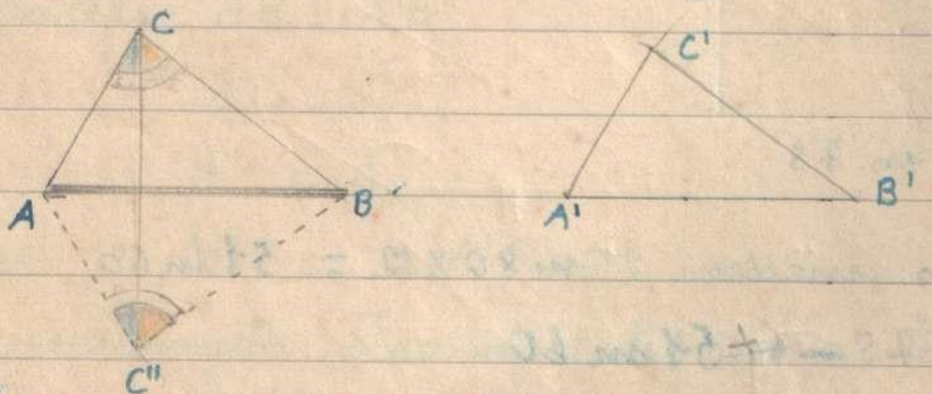
26 m.

As 2 larguras = 26 m x 2 = 52 m

O comprimento de 1 lote = 48 m ÷ 8 = 6 m.
Os 2 comp. de 1 lote = 6 m x 2 = 12 m
Perimetro de cada lote = 52 m + 12 m = 64 m

V. 9,5

3º Teorema: Dois triangulos são iguais quando tem os tres lados respectivamente iguais

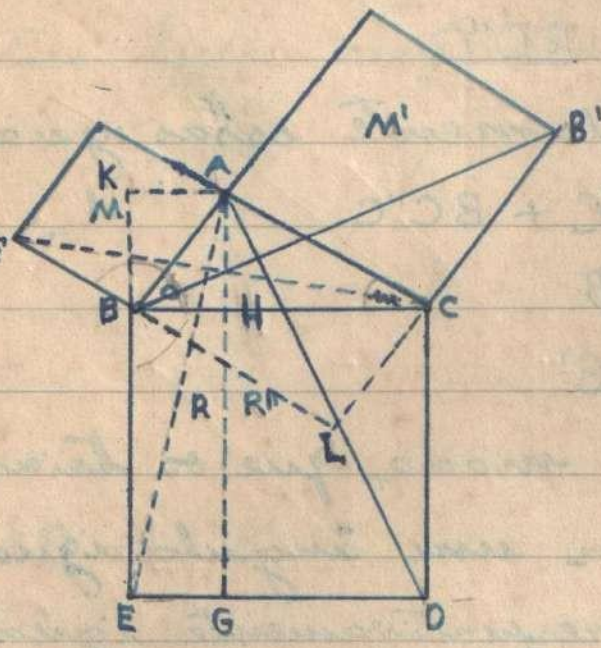


Hipotese: AB = A'B'
BC = B'C'
AC = A'C'
Tese: △ ABC = △ A'B'C'
Demonstração: Transportemos o triangulo A'B'C' sobre o triangulo ABC, de modo que A'B' coincida com AB, caindo A' sobre A e B' sobre B e que o triangulo A'B'C' fique no semiplano inferior em relação a AB, isto é, na posição ABC''.
Liguemos os pontos C e C''. Notando que o

triangulo ACC'' é isósceles, pois AC = AC'', segue-se que os angulos ACC'' e AC''C são iguais.
Por outro lado, como o triangulo BCC'' também é isosceles, os angulos BCC'' e BC''C são iguais.
Temos: ACC'' = AC''C
BCC'' = BC''C
Somando ordenadamente essas igualdades vem:
ACC'' + BCC'' = AC''C + BC''C
ACB = AC''B
ACB = A'C'B'
Concluimos desse modo, que os triangulos considerados tem um ângulo igual compreendido entre lados respectivamente iguais, e são iguais, e são iguais pelo 2º teorema.
Δ ABC = A'B'C'.

Teorema de Pitagoras

O quadrado construido sobre a hipotenusa de um triangulo retangulo é igual a soma dos quadrados construidos sobre os catetos



Hipotese: Δ ABC é retangular e BCDE, M e M' são quadrados construidos sobre os seus lados.

Tese: BCDE = M + M'

Demonstração: 1°. Do ponto A, abaixando a perpendicular AG essa divide o quadrado BCDE em 2 retangulos R e R'.

2°. Traçando as retas AE e FC formam os 2 triangulos ABE e FBC iguais por terem um angulo igual compreendido entre dois

lados respectivamente iguais a saber:
o angulo ABE iguala o angulo FBC porque ambos são formados de um angulo reto e do angulo O; AB = BF como lados de um mesmo quadrado e BC = BE pela mesma razão.

3º De outra parte a superf. do triangulo ABE vale a metade do retangulo R, porque estas 2 figuras têm mesma base BE e mesma altura AK ou BH. Do mesmo modo a superf. do triangulo FBC vale a metade da do quadrado M, porque ambas tem uma base BF e mesma altura CL ou AB. Por conseguinte o retangulo R é equivalente ao quadrado M.

4º Por um raciocinio análogo demonstra-se que o retangulo R' é equivalente ao quadrado M'.

$\triangle ACD = \triangle BCB'$

$\triangle ACD = \frac{R'}{2}$

$\triangle BCB' = \frac{M'}{2}$

Por conseguinte $R' = M'$.

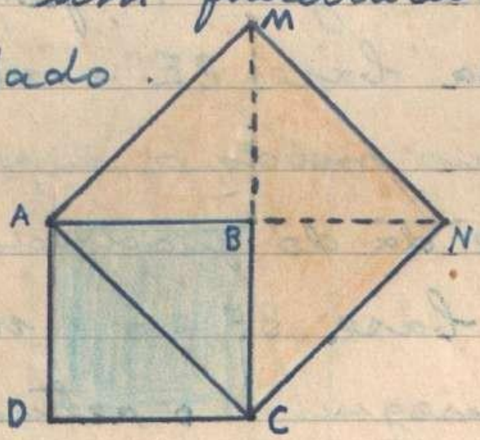
Logo: $R + R'$ ou $BCDE = M + M'$

5º A superficie de um quadrado sendo igual ao quadrado do seu lado, se representarmos por a, b e c os três lados de um Δ retangulo, teremos:

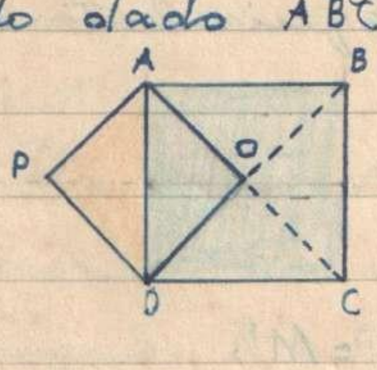
$a^2 = b^2 + c^2$

Ginasio Santa Rita, 10 de Outubro de 1949

1º Construir um quadrado duplo de um quadrado dado.



2º Construir um quadrado igual à metade de um quadrado dado ABCD

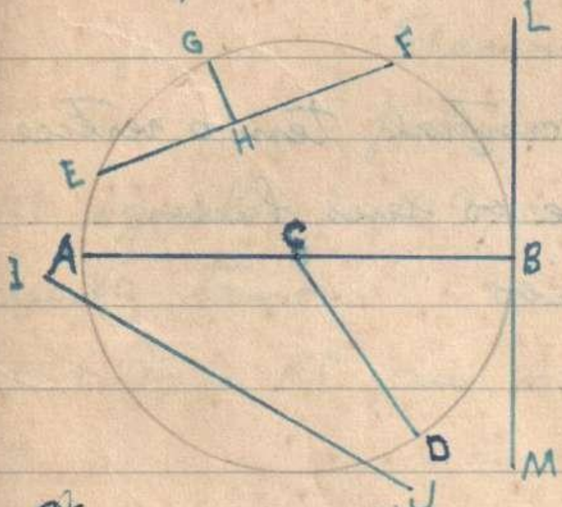


V. 10

Ginásio Santa Rita, 15 de Outubro de 1949

O circulo.

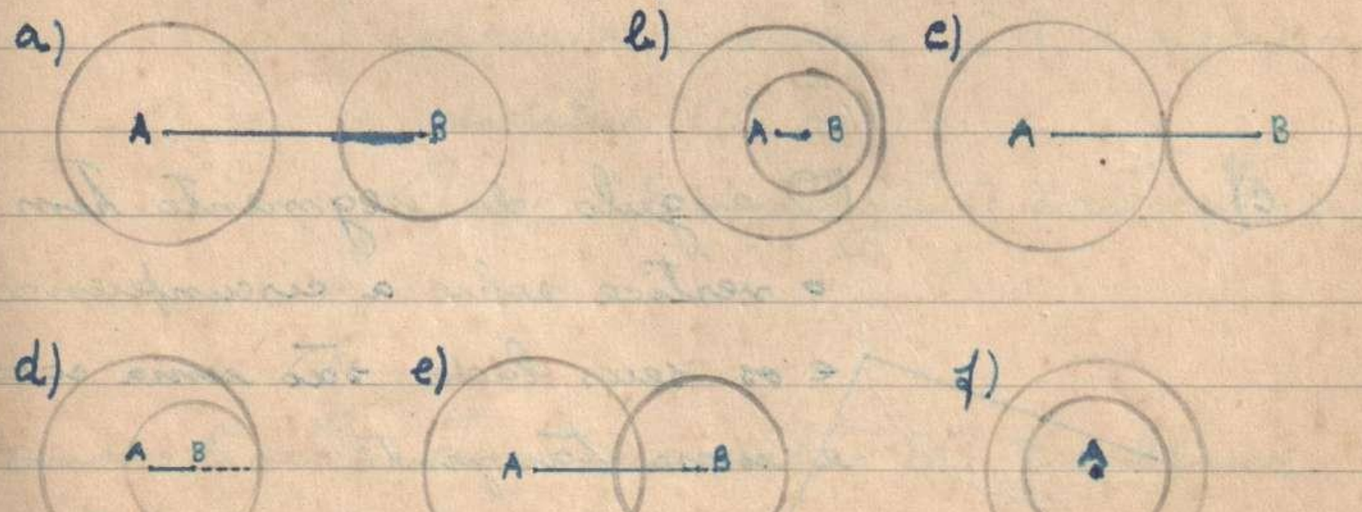
1º Definições: Livro pag. 20



AB - diametro
CD - raio
EF - corda
GH - flecha
IJ - secante
LM - tangente

2º Varias posições de duas circunferencias:

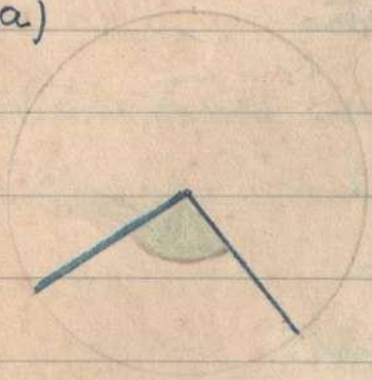
a) exteriores
b) interiores
c) tangentes exteriormente
d) tangentes interiormente
e) secantes
f) concentricas



3ª Divisão da circunferencia: Livro pag. 22

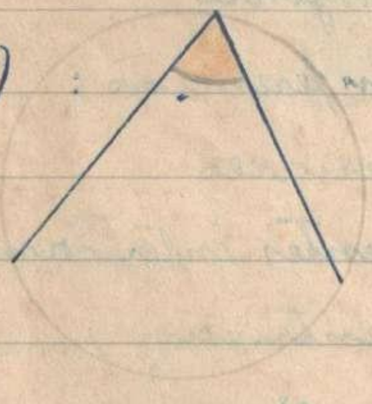
4º Angulos do circulo:

a)



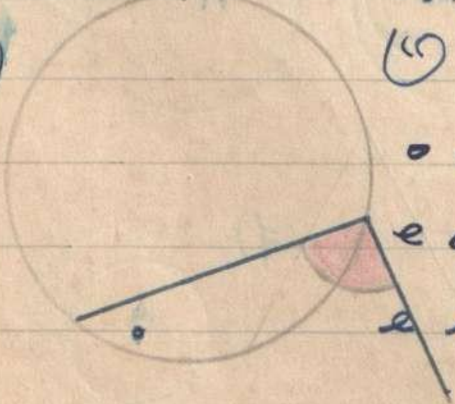
O angulo central tem o vertice no centro e os seus lados são 2 raios

b)



O angulo inscrito tem o vertice na circunferencia; os seus lados são duas cordas

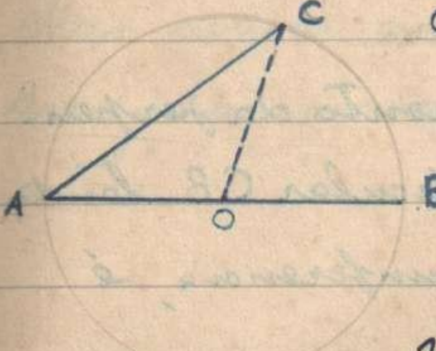
c)



O angulo do segmento tem o vértice sobre a circunferencia e os seus lados são uma corda e uma tangente

ex

5º Teorema: O diametro é a maior das cordas de um circulo.



Hipotese: Sejam o diâmetro AB e uma corda qualquer AC

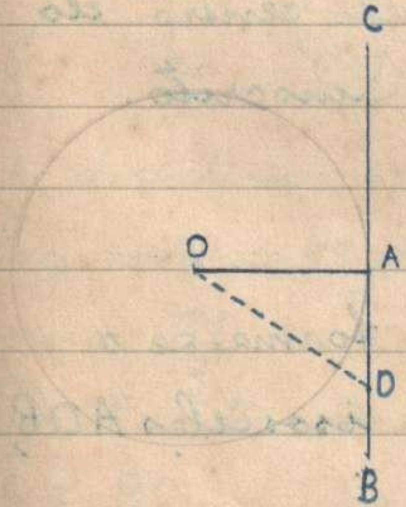
Tese: $AB > AC$

Demonstração: Traçando o raio OC, podemos escrever: $AO + OC > AC$

OC igualando OB, como raios de um mesmo circulo, temos:

$AO + OB > AC$ ou $AB > AC$

6º Teorema: A perpendicular à extremidade de um raio é tangente à circunferencia



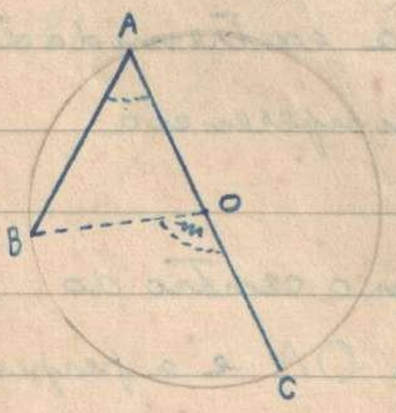
Hipotese: Sejam o centro do circulo O, o raio OA e a perpendicular CB a OA.

Tese: CB = tangente à circunferencia

Demonstração: Tomando sobre BC qualquer ponto D, outro que A e traçando OD veremos:

A reta OD sendo obliqua a CB, é maior que a perpendicular OA, partindo do mesmo ponto; logo, o ponto D está fora da circunferência.
O mesmo acontece para todo o ponto da perpendicular outro que A. Esta perpendicular CB tendo um unico ponto comum com a circunferencia, é pois uma tangente a esta.

7º Teorema: O angulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre os lados:
1º caso: Um dos lados passa pelo centro do circulo.



Hipótese: O angulo A em que o lado AC passa pelo centro do circulo é o angulo inscrito.
Tese: $A = \text{arco } \frac{BC}{2}$

Demonstração: Traçando o raio OB, forma-se o angulo m, exterior ao triangulo isosceles AOB, temos:

$$m = A + B = 2A,$$

porque A = B como angulos opostos aos lados iguais do triangulo isósceles ABO

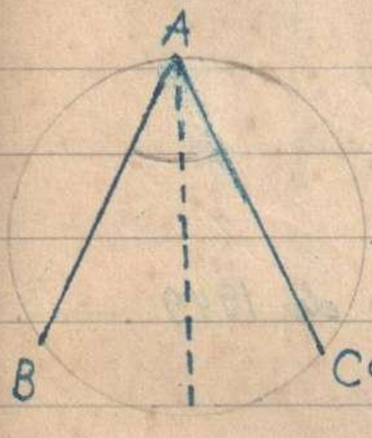
Logo: $A = \frac{m}{2}$.

Mas sendo angulo central, o ângulo m tem por medida o arco BC. Portanto:

$$\hat{A} = \text{arco } \frac{BC}{2}$$

V. 9,7.

2º caso: O centro está compreendido entre os dois lados do angulo.



Hipotese.: Seja o angulo A, em que os lados compreendem o centro do circulo o.

Tese: $A = \frac{BC}{2}$

Demonstração: Traçando o diametro AD, dividimos o angulo $\hat{A}$ em duas partes m e n.

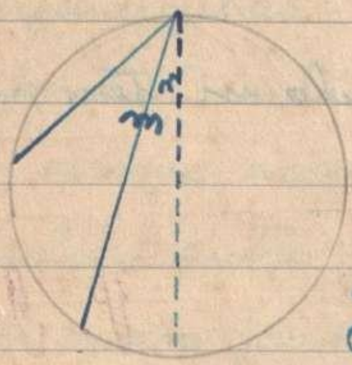
Segundo o 1º caso temos:

$m = \frac{BD}{2}$ e $n = \frac{DC}{2}$

Portanto $m + n = \frac{BD}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{BC}{2}$

$\hat{A} = \frac{BC}{2}$

3º caso: O centro está fora do circulo:



Hipotese: Seja o angulo A, em que os lados ocupam o mesmo lado do centro o do circulo

Tese: $A = \frac{BC}{2}$

Demonstração: Traçando o diametro AD, forma os angulos m e n que tem por medida:

$m = \frac{BD}{2}$ e $n = \frac{CD}{2}$

Ora, $\hat{A} = m - n$

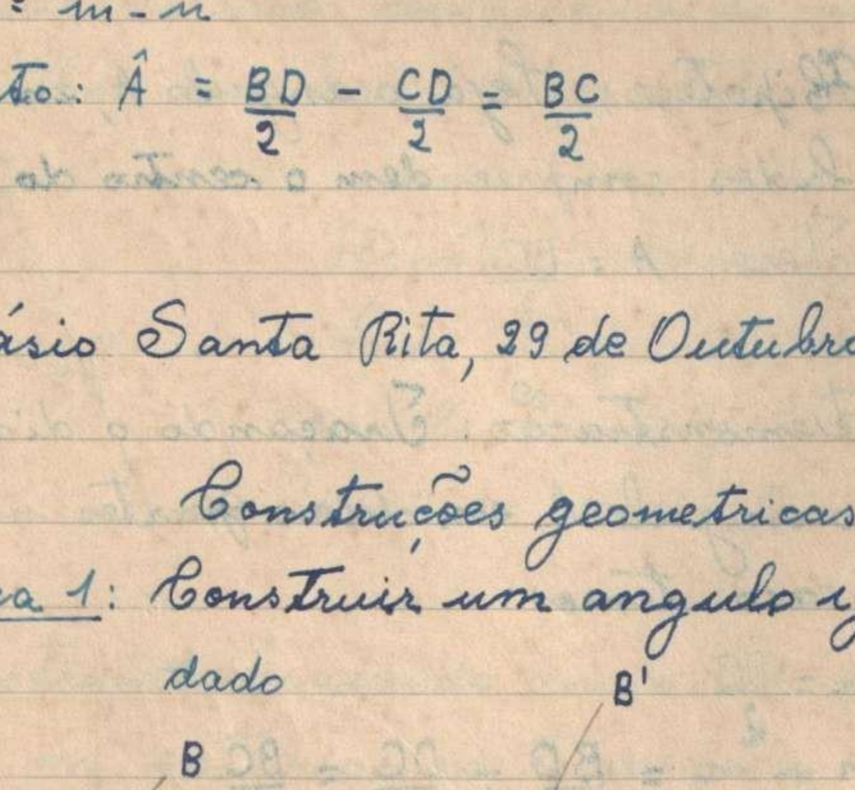
Portanto: $\hat{A} = \frac{BD}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$

$\hat{A} = \frac{BC}{2}$

Ginásio Santa Rita, 29 de Outubro de 1949

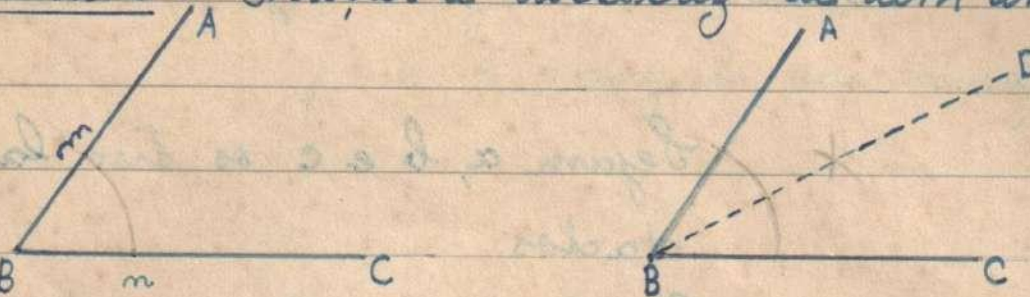
Construções geometricas.

Problema 1: Construir um angulo igual a outro dado



Angulo dado BAC = ao ângulo B'A'C'

Problema 2: Traçar a bissetriz de um angulo.



A bissetriz do angulo ABC é **BD**

Problema 3: Dividir um angulo em 4 partes iguais

Com o auxilio de regua e compasso, traçar uma paralela a uma reta por um ponto dado

Dado reta AB

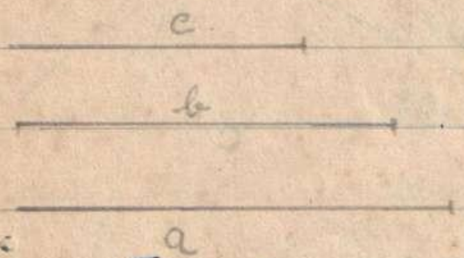
ponto C

Pelo ponto C traçar uma reta que corte AB num ponto D. Fazendo centro em D e com o raio igual a DC descrever o arco CE e fazendo centro em C com o mesmo raio descrever outro arco DE.

Determinar o ponto F

Ligar os pontos C e F

Construir um triangulo, dados os tres lados.



Sejam a, b e c os tres lados dados.

É necessario determinar a posição do vertice A.

1º O lado a é a base CB do triangulo a construir.

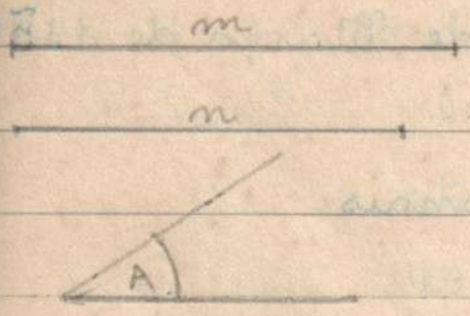
2º Fazendo centro no vertice B com um raio igual ao segmento b, traçar uma ○

3º Fazendo centro no vertice C com um raio igual ao segmento c, traçar uma ○

4º O vertice A é o ponto de intersecção das duas ⓢ.

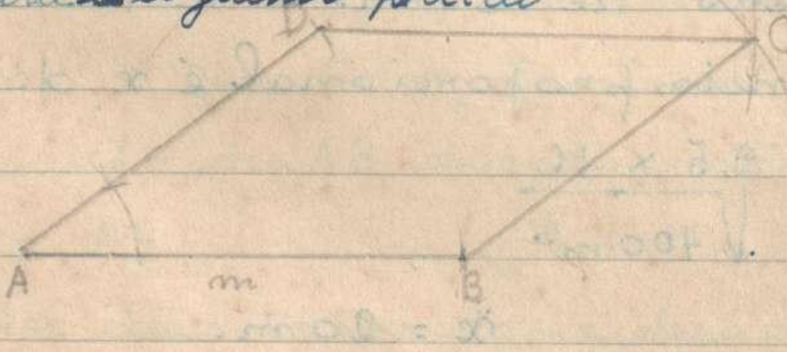
5º Ligando o vertice A aos vertices B e C, teremos o triangulo pedido ABC.

Construir um paralelogramo, dados dois lados consecutivos e o angulo por eles formado



Sejam m e n os lados dados
e A o ângulo por eles formado

1º Constroe-se o angulo BAD no qual AB = m
e AD = n.
2º Fazendo centro no vertice D com um raio igual
ao lado m, traçar uma O
3º Fazendo centro no vertice B com um raio igual
ao lado n, traçar uma O.
4º Na intercessão das duas Ⓢ, está situado o
vertice C
5º Liga-se este ponto aos pontos B e D e ter-se-ia
o paralelogramo pedido



Ginásio Santa Rita, 16 de Março de 1950

I Linhas proporcionais

1º Teoria – Livro pag. 167.

A meia proporcional entre duas linhas dadas é a raiz quadrada do produto dessas linhas.

Quarta proporcional é uma linha que forma uma proporção com 3 linhas dadas.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, d é uma quarta proporcional às linhas a, b e c.

2º Exercícios numéricos:

Achar uma meia proporcional entre duas linhas retas de 25 m. e de 16 m.

Solução: A meia proporcional é x. daí

$$x^2 = 25 \times 16$$

$$x = \sqrt{400m^2}$$

$$x = 20 m.$$

Resposta: A meia proporcional mede 20 m.

Dever:

Achar uma quarta proporcional à 3 retas

de 45 m, 30 m e 36 m.

Solução: A quarta proporcional é x

$$45 : 30 :: 36 : x$$

$$45x = 30 \times 36$$

$$x = \frac{\overset{6}{\cancel{30}} \times \overset{4}{\cancel{36}}}{\underset{9}{\cancel{45}}} = 24 \text{ m.}$$

Resp. A quarta proporcional mede 24 m. V. 10

ex

3°. Segmentos aditivos e subtrativos.

A——M——B - - - N Sobre o segmento AB consideremos 2 pontos: M e N, o primeiro situado entre os pontos A e B e o segundo no prolongamento de AB. Diz-se que o ponto M pertence a AB, divide internamente o segmento AB, e que o ponto N, tomado sobre o prolongamento de AB, divide externamente o segmento AB.

Nos dois casos considerados, temos:

$MA + MB = AB$; $NA - NB = AB$.

Os segmentos MA e MB denominam-se aditivos; os segmentos NA e NB denominam-se subtrativos.

4º Pontos que dividem um segmento numa razão dada.

Teorema: Sobre uma reta existem apenas 2 pontos, cuja razão das distancias aos extremos de um segmento da mesma reta é igual a um número dado.

Hipotese: Livro, pag. 167

Tese: $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$

Demonstração: Livro, pag. 167

Ginásio Santa Rita, 2 de Abril de 1950.

Exercicio

Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma secante três segmentos, de 3 m, 4 m e 5 m, respectivamente. Calcular os segmentos determinados pelo mesmo feixe sôbre outra secante, cujo comprimento total entre as paralelas extremas é de 48 m.

Solução: $3 + 4 + 5 = 12$ partes ou 48 m.

1º segmento $= \dfrac{\overset{4}{\cancel{48}}\,m \times 3}{\cancel{12}} = 12\,m.$

2º segmento $= \dfrac{\overset{4}{\cancel{48}}\,m \times 4}{\cancel{12}} = 16\,m.$

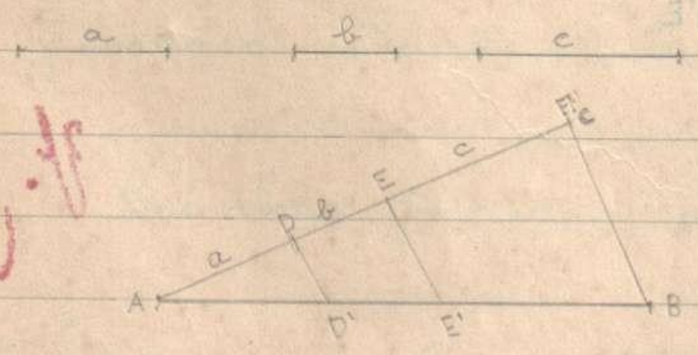
3º segmento $= \dfrac{\overset{4}{\cancel{48}}\,m \times 5}{\cancel{12}} = 20\,m.$

Resp: Os segmentos determinados são de: 12 m, 16 m, e 20 m.

Ginásio Santa Rita, 19 de Abril de 1950.

Problema I: Dividir um segmento de reta em partes proporcionais a segmentos dados.

Solução: Seja dividir o segmento AB em partes proporcionais aos segmentos a, b, c.



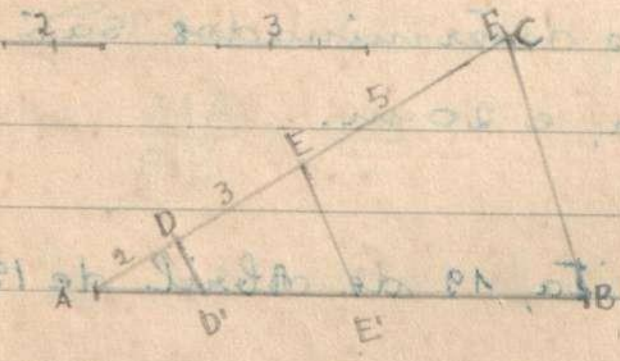
As paralelas DD'; EE'; FB dividem as secantes

AB e AC em partes proporcionais, porisso temos:

$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'}$ ou $\frac{a}{AD'} = \frac{b}{D'E'}$.

$\frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'B}$ ou $\frac{b}{D'E'} = \frac{c}{E'B}$

13) Dividir um segmento de 5 cm em três partes proporcionais a 2, 3 e 5.



A unidade é $\frac{1}{2}$ cm

As paralelas DD'; EE'; FB dividem as secantes AB e AC em partes proporcionais porisso temos:

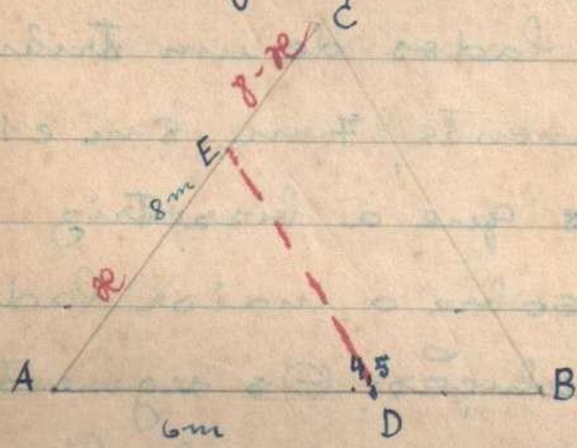
$\frac{AD}{A'D'} = \frac{DE}{D'E'}$ ou $\frac{2}{AD'} = \frac{3}{D'E'}$

$\frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'B}$ ou $\frac{3}{D'E'} = \frac{5}{E'B}$

V. 9

Ginásio Santa Rita, 26 de Abril de 1950.

5) Dois lados de um triangulo têm 6 m. e 8 m. Do vértice comum toma-se, sobre o primeiro lado, um segmento de 4,5 m. Qual o segmento a tomar sobre o segundo lado para que a reta determinada pelos extremos seja paralela ao terceiro lado



$AD : DB :: AE : EC$

$4,5 : 1,5 :: x : 8 - x$

$4,5\,(8 - x) = 1,5 \times x$

$36 - 4,5\,x = 1,5\,x$

$-4,5\,x - 1,5\,x = -36$

$-6x = -36$

$\boxed{x = 6}$

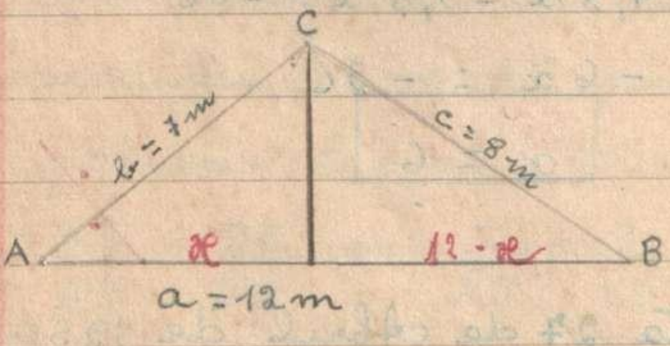
Ginásio Santa Rita, 27 de Abril de 1950.

Linhas proporcionais no triangulo.

I Teorema: A paralela a um dos lados de um triangulo divide os outros dois lados em

partes proporcionais.
- Livro, pag. 173.
II Teorema: A bissetriz do ângulo interno de um triangulo divide o lado oposto em segmentos aditivos proporcionais aos dois outros lados
Livro, pag. 174

Problema: 91 Os três lados de um triângulo medem, respectivamente 7 m, 8 m e 12 m. Calcular os segmentos que a bissetriz interna determina sobre o maior lado



Solução: Os segmentos determinados pela bissetriz são: x e 12 - x

Segundo o Teorema II devemos ter:

$m : b :: n : c$

$x : 7 :: 12 - x : 8$

$8x = 84 - 7x$

$15x = 84$

$x = 5,6$

$12 - x = 6,4$

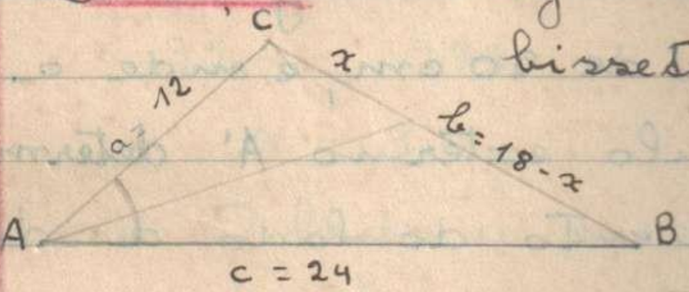
Resp. Os segmentos que a bissetriz

interna determina sobre o maior lado medem

<u>5,6 m e 6,4 m</u>

10) Os lados a, b, c de um triângulo de perimetro 54 m, são respectivamente proporcionais aos numeros 2, 3 e 4. Pedem-se os segmentos que a bissetriz interna determina sobre o lado b.

<u>Solução</u>: Os segmentos determinados pela bissetriz são x e $18 - x$



Segundo o Teorema II devemos ter:

$a + b + c = 54$ m

$2 + 3 + 4 = 9$ partes ou 54m

1 parte = 6 m

Por conseguinte $a = 12$, $b = 18$, $c = 24$

$x : a :: 18 - x : c$

$x : 12 :: 18 - x : 24$

$24x = 216 - 12x$

$36x = 216$

$x = \frac{216}{36}$

$\boxed{x = 6}$

$18 - 6 = 12$

12

Resp. Os segmentos que a bissetriz interna determina sobre o lado b medem 6 m e 12 m.

V. 9,7

Ginásio Santa Rita, 4 de Maio de 1950

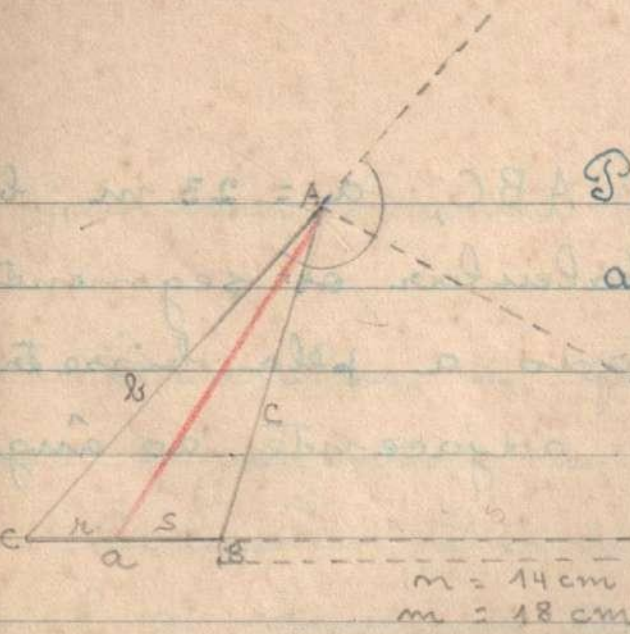
III Teorema: Livro pag. 175

Problema: 12) Dado um triangulo ABC, cujo perimetro é de 20 cm, e onde a bissetriz do angulo externo A' determina sobre o prolongamento do lado a dois segmentos subtrativos de 18 cm e 14 cm, respectivamente; pede-se:

1º) os valores dos segmentos aditivos determinados no lado a pela bissetriz do angulo interno A:

2º Os valores dos lados a, b, c.

Solução:



Perimetro = 20 cm

$a = m - n = 18\ cm - 14\ cm = 4\ cm$

Os lados b e c medem

$20\ cm - 4\ cm = 16\ cm$

O lado $b = x$

O lado $c = 16 - x$

Equação: Segundo o Teorema III, devemos ter: $m : b :: n : c$, substituindo

$18 : x :: 14 : 16 - x$ $\qquad c = 16 - 9$

$14x = 288 - 18x$ $\qquad c = 7$

$32x = 288$

$x = 9$

Resp: O lado a mede 4 cm; o lado b mede 9 cm e o lado c mede 7 cm.

Solução: O segmento $r = x$ e o segmento $s = 4 - x$.

Equação: $r : b :: s : c$ substituindo

$x : 9 :: 4 - x : 7$ $\qquad$ O seg. $s = 4 - 2,25$

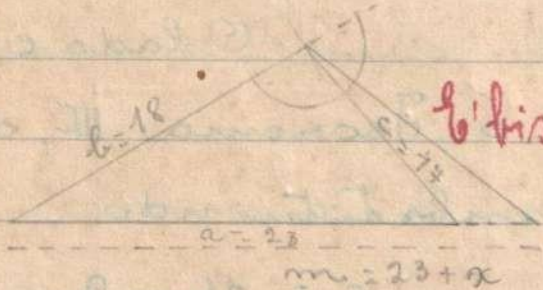
$7x = 36 - 9x$ $\qquad = 1,75$

$16x = 36$

$x = 2,25$

Resp. Os segmentos aditivos medem 2,25 cm e 1,75 cm

Em um triangulo ABC, a = 23 m, b = 18m e c = 17 m. Calcular os segmentos determinados no lado a pela bissetriz do angulo externo adjacente ao ângulo A.



É bissetriz!

O segmento n = x e o segmento m = 23 + x

m : ~~b~~ : n : c

23 + x : 18 : : x : 17

18 x = 391 + 17 x

18 x - 17 x = 391

$\boxed{x \quad = 391}$

O segmento m = 23 + 391 = $\boxed{414}$

Resp. Os segmentos determinados no lado a pela bissetriz do angulo externo adjacente ao ângulo A são de 391 m e 414 m

V. 9,5

Ginásio Santa Rita, 25 de Maio de 1950.

1º Calcular a quarta proporcional aos segmentos a = 13 m, b = 27 m, e c = 52 m

Solução: Sendo a quarta proporcional x, devemos ter:

$a : b :: c : x$

$13 : 27 :: 52 : x$

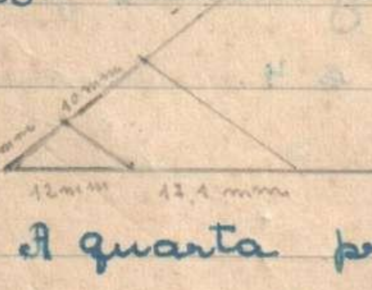
$13x = 1.404$

$x = 108$

Resp. A quarta proporcional mede 108 m.

2º Construir a quarta proporcional aos numeros 7, 10 e 12 sendo a unidade de comprimento igual a 1 mm.

Solução



Resp. A quarta proporcional mede 17,1 mm

3º Calcular a terceira proporcional aos segmentos de 15 e 40 cm sendo o segmento de 15 cm o meio.

Solução: Sendo a terceira proporcional x, devemos ter:

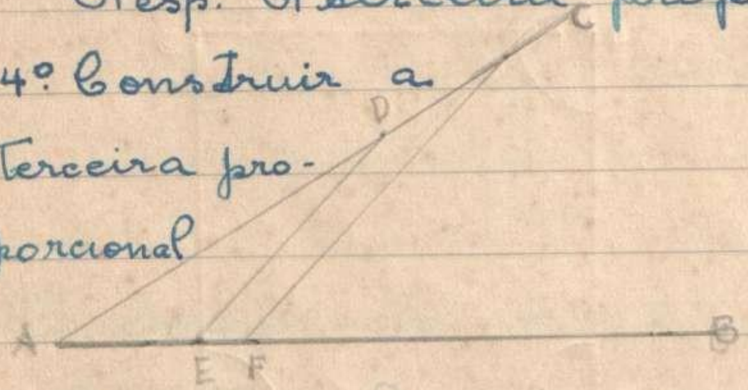
$x : 15 :: 15 : 40$

$40x = 225$

$x = 5,625$

Resp. A terceira proporcional mede 5,6 cm

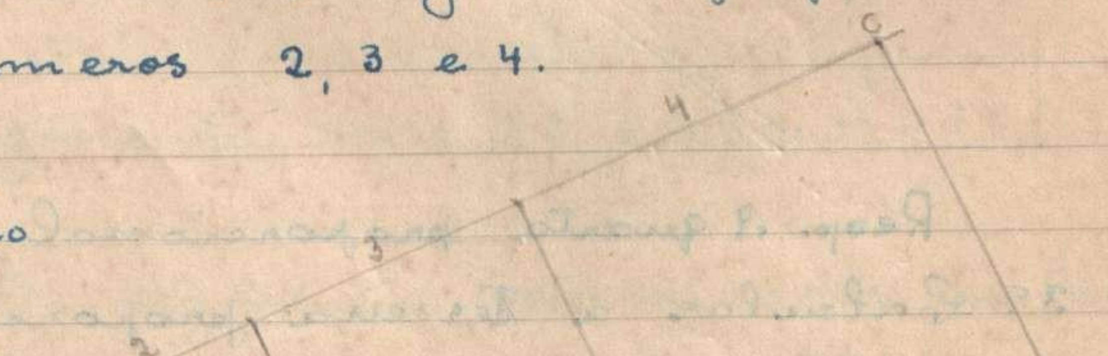
4º Construir a terceira proporcional



O segmento EF é a terceira proporcional mede 5,6 cm.

5º. Dividir gráficamente um segmento de 10 cm. em 3 segmentos proporcionais aos numeros 2, 3 e 4.

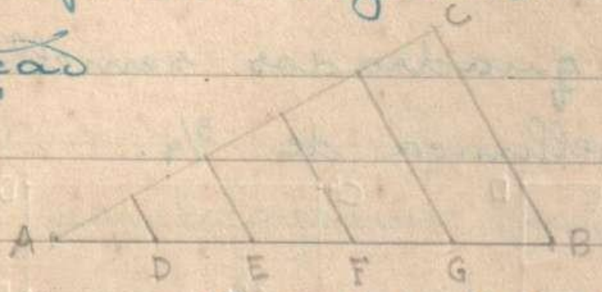
Solução



Os segmentos AD, DE e EB são proporcionais aos numeros 2, 3 e 4.

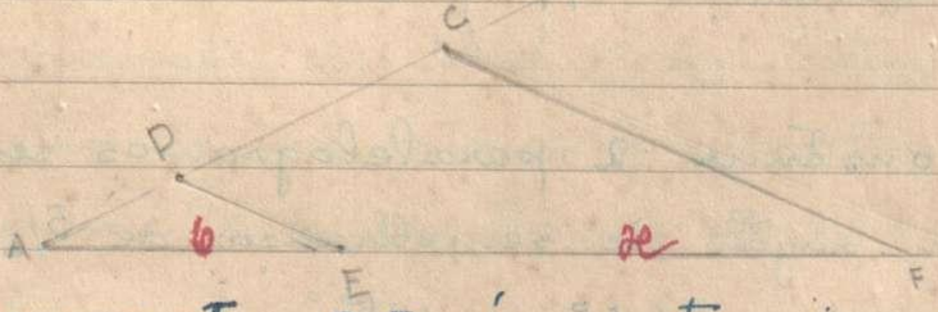
6º. Dividir gráficamente um segmento em 5 partes iguais.

Solução



Os segmentos AD, DE, EF, FG, GB são as 5 partes pedidas; são iguais.

7º. Construir a terceira proporcional a 2 segmentos de 3 e 6 cm.



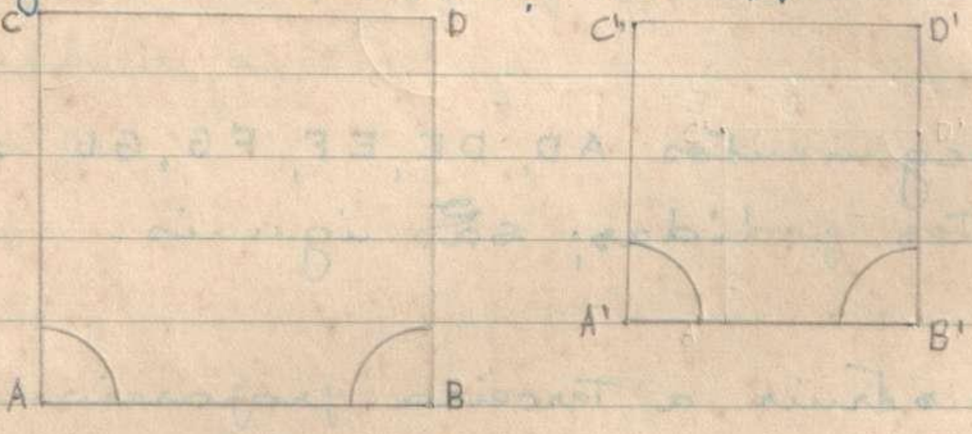
O segmento EF é a terceira proporcional mede ~~5 cm 8 dc~~ 12 cm.

V. 9

Ginásio Santa Rita, 3 de Agosto de 1950.

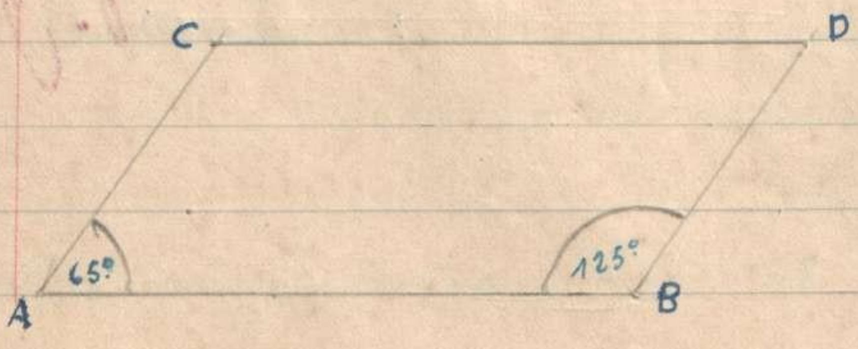
Dever

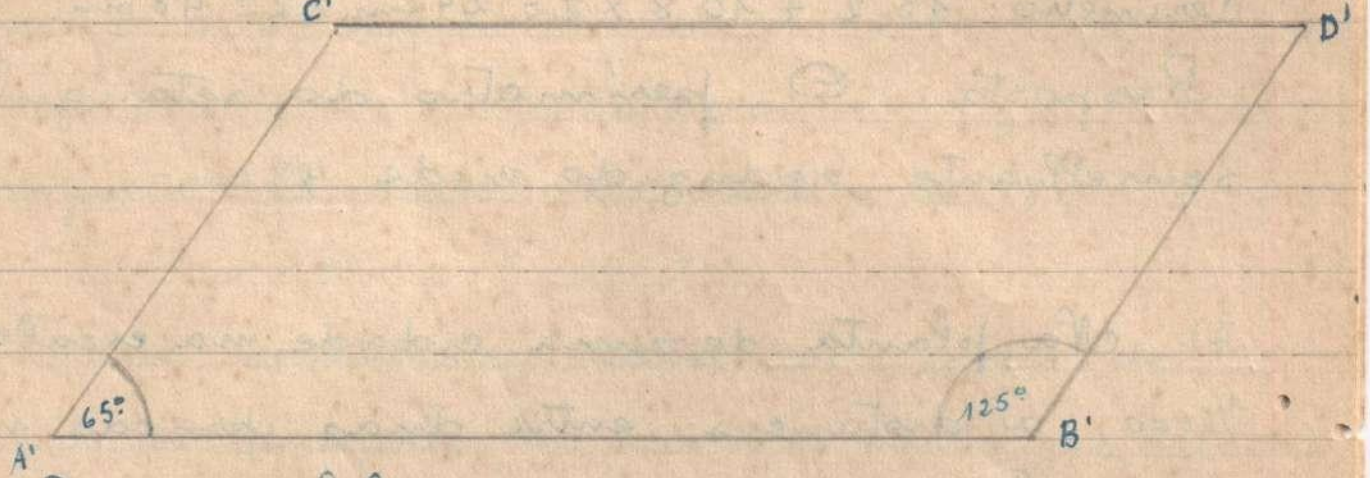
1) Construir 2 quadrados semelhantes com a razão de semelhança de $3/4$.



O 2º quadrado foi construido na razão de semelhança $3/4$ por isso houve redução.

2º) Construir 2 paralelogramos semelhantes com a razão de semelhança de $5/3$, os angulos medem 65º e 125º





O 2º paralelogramo foi construido na razão de semelhança, 5/3 porisso houve ampliação

V. 10

Ginásio Santa Rita, 16 de Agosto de 1950.

3) As dimensões de um retângulo são, respectivamente, de 22 e 18 cm. Determinar o perímetro de um retangulo semelhante reduzido, sendo 3/5 a razão de semelhança.

Solução:

Comp. 22 cm

Largura. 18 cm

C. $\frac{3 \times 22}{5} = \frac{66}{5} = 13,2$ cm

L. $\frac{3 \times 18}{5} = \frac{54}{5} = 10,8$ cm

Perimetro: 13,2 + 10,8 x 2 = 24 cm x 2 = 48 cm.

Resposta: O perímetro do retangulo semelhante reduzido mede 48 cm

7) Na planta de uma cidade, na escala de 1/5000, a distancia entre duas praças mede 25 cm. Determinar a distancia natural entre as duas praças.

Solução: Distancia natural entre as duas pracas = 25 x 5000 = 125.000 cm.

125.000 = 1250 m.

Resposta: A distancia natural entre as duas praças é de 1250 m.

V. 9,7

Ginásio Santa Rita, 20 de Agosto de 1950.

9 - Numa carta do Estado do Rio de Janeiro a distancia de 50 km entre as cidades de Petropolis e Vassouras é representada por 5 cm. Determinar a escala da carta

Solução: A escala = 50 km = 5.000 m

5 cm = 0,05 m

5.000.000 ÷ 5 = 1/1000.000

Resposta: A escala da carta é de 1/1.000.000

10- Qual a distancia entre as cidades de Goiás e Anápolis, se numa carta do Estado de Goiás de 1/10.000.000 essa mesma distancia é de 1.5 cm?

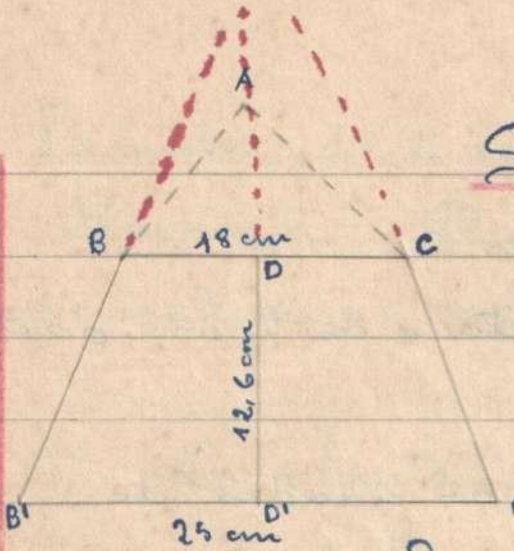
Solução: Distancia: 1.5 cm × 10.000.000 = 15.000.000 cm = 150.000 m = 150 km.

Resposta: A distancia entre as duas cidades é de 150 km.

V. M

Ginásio Santa Rita, 27 de Agosto de 1950.

11- As bases de um trapezio têm respectivamente, 25 cm e 18 cm e a altura 12,6 cm. Calcular as alturas dos triangulos obtidos ao se prolongar os lados não paralelos.



Solução: $\frac{BD}{B'D'} = \frac{AD}{AD'}$ $\frac{9}{12,5} = \frac{x}{x+12,6}$

$12,5x = 9x + 113,4$

$12,5x - 9x = 113,4$

$x = 32,4$ cm

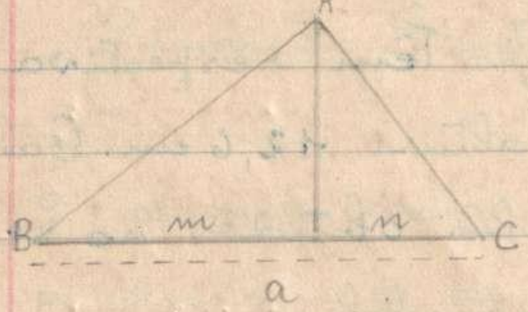
Resposta: As alturas dos triangulos obtidos são de 32,4 cm e 45 cm

V. 9

Ginásio Santa Rita, 31 de Agosto de 1950

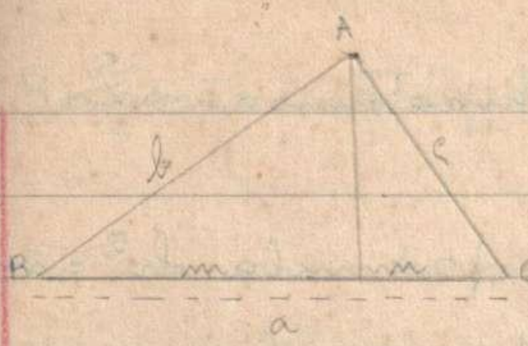
Relações métricas no triangulo retângulo.

1º) A hipotenusa é a soma das projeções dos catetos sobre ela.



$a = m + n$

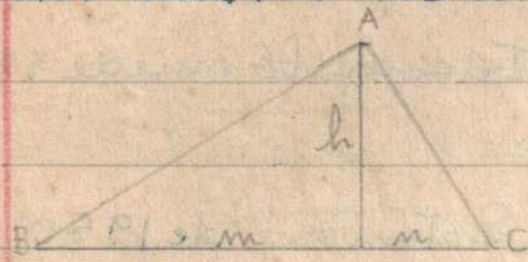
2º) Qualquer cateto é media proporcional entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela



$$b^2 = am$$

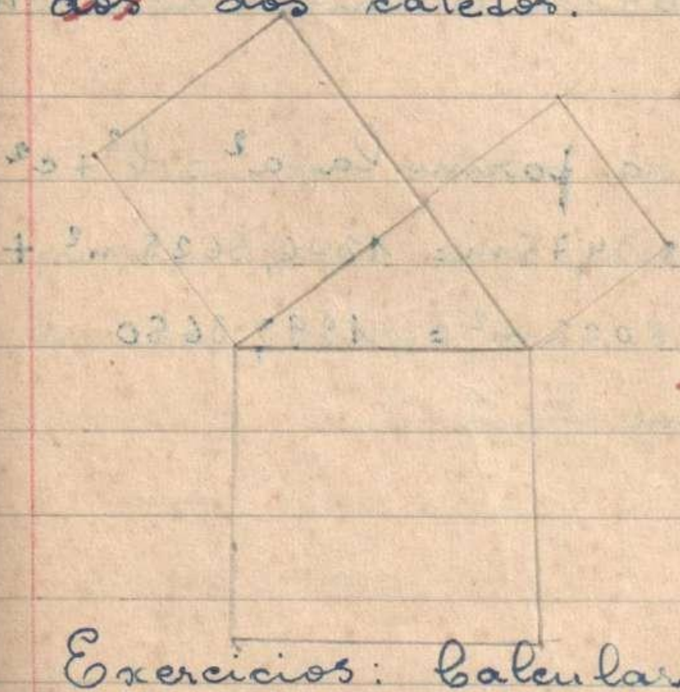
$$c^2 = an$$

3º) A altura traçada sobre a hipotenusa é media proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



$$h^2 = mn$$

4º) Teorema de Pitágoras: o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados ~~dos~~ dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Exercicios: Calcular a altura de um triangulo retângulo, sabendo que os segmentos que

ela determina sobre a hipotenusa são
$m = 12$ e $n = 27$

Solução: Aplicando a formula $h^2 = mn$
obtemos: $h^2 = 12 \times 27 = 324$

$h = \sqrt{324}$ | 18
1
224 | $28 \times 8 = 224$
224

Resposta: A altura do triangulo mede 18 m.

Ginásio Santa Rita, 9 de Setembro de 1950

1) Em um triangulo retangulo, os catetos são $b = 34,75$ m e $c = 28,05$ m. Calcular a hipotenusa.

Solução: Aplicando a formula $a^2 = b^2 + c^2$
obtemos: $a^2 = 34,75\ m \times 34,75\ m = 1206,5625\ m^2 +$
$28,05\ m \times 28,05\ m = 786,8025\ m^2 = 1993,3650$

$a = \sqrt{1993,3650}$ | 44,65 m
16
-393 | 84
336
-5736 | 886
5316
-42050 | 8924
35696
-6354

Resposta: A hipotenusa mede 44,65 m.

2) Em um triangulo retangulo a hipotenusa mede 6,28 m e um dos catetos mede 3,06 m. Calcular o outro cateto.

Solução: Aplicando a formula $c^2 = a^2 - b^2$ obtemos c^2: 6,28 × 6,28 = 39,4384 m^2 − 3,06 × 3,06 = 9,3636 m^2 = 30,0748 m^2

c = $\sqrt{30,0748}$ | 5,48 m

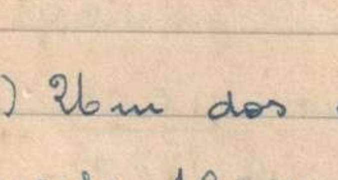
30,0748	5,48 m
25	
−507	104
416	
−9148	1088
8704	
−444	

Resposta: O outro cateto mede 5,48 m

3) Um dos catetos de um triangulo retangulo mede 18 m e a sua projeção sobre a hipotenusa mede 7,2 m. Calcular a hipotenusa

Solução: $h^2 = m = 18^2 - 7,2^2$

$h = \sqrt{18^2 - 7,2^2} = 272,16\ m^2$



272,16	16,4 m
1	
172	26
156	
−1616	324
1296	
−320	

$h^2 = mn$

$272,16 = 7,2\,x$

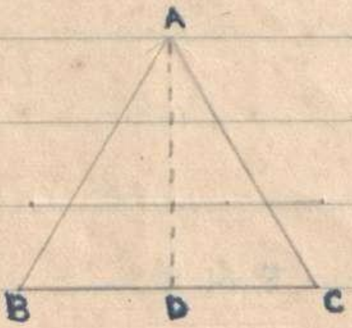
$x = 272,16 \div 7,2 = 37,8$

Resposta: A hipotenusa mede 37,8m + 7,2m = 45 m

V. 9,5

Ginásio Santa Rita, 21 de Setembro de 1950

Altura do triangulo equilateral



$BD = DC = \frac{l}{2}$

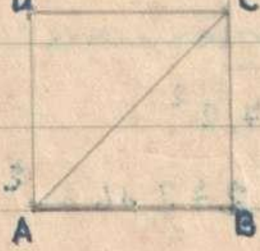
Pelo teorema de Pitagoras teremos:

$h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$

$h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$

$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ (1, 732)

Diagonal do quadrado



O triangulo ACD, permite concluir:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ ou

$d^2 = l^2 + l^2$

$d^2 = 2l^2$

$d = l\sqrt{2}$ (1, 414

Exercicios

1) Calcular a altura do triangulo equilateral cujo lado = 1,465 m

Solução: Aplicando a formula:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$, teremos

$$h = \frac{1,465\,m \times 1,732}{2} = 1,268\,m.$$

Resposta: A altura do Triangulo mede 1,268 m.

2) Calcular o lado do triangulo equilateral cuja altura = 10,26 m.

Solução: Aplicando a formula

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$ teremos: $10,26\,m = \frac{l \times \overset{0,866}{\cancel{1732}}}{\cancel{2}} = 0,866\,l = 10,26\,m.$

$$l = \frac{10,26}{0,866} = 11,847\,m.$$

Resp. O lado do triangulo mede 11,847 m.

3) Calcular a diagonal do quadrado de lado igual a 15 m.

Solução: Aplicando a formula: $d = l\sqrt{2}$

$d = 15\,m \times 1,414 = 21,210\,m.$

Resposta: A diagonal mede 21,210 m.

4) Calcular o lado do quadrado cuja diagonal mede 18 m.

Solução: Aplicando a formula $d = \ell\sqrt{2}$ $18\ m = \ell \times 1,414$

$18 = 1,414\,\ell$

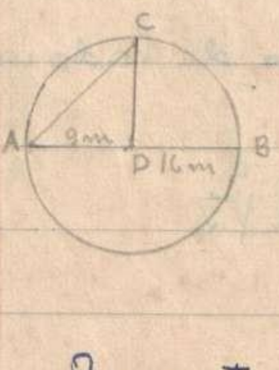
$\ell = \frac{18}{1,414} = \cancel{0,785} = 12,726\ m$

Resposta: O lado mede 0,785 m.

V. 9

Ginásio Santa Rita, 28 de Setembro de 1950

De certo ponto pertencente a uma circunferencia, cujo raio mede 8 m.; tiram-se um diametro e uma corda; determinar o comprimento desta, sabendo que a sua projeção sobre o diametro mede 9 m.



Solução: $AC^2 = AB \times AD$

$AC^2 = 16 \times 9 = 154$

$AC = \sqrt{144} = 12$

Resposta: O comprimento da corda mede 12 m.

Uma corda e um diametro do circulo partem do mesmo ponto. A corda mede 12 m. e o raio do circulo mede 8 m. Calcular a projeção dessa corda sôbre o diametro.

Solução: $12^2 = 16 \times x$

$144 = 16x$

$-16x = -144$

$x = 9$

Resposta: A projeção da corda sobre o diâmetro mede 9 m.

V. 9,7

Ginásio Santa Rita, 9 de Outubro de 1950

1- Calcular o comprimento de uma circunferência de raio 3 m.

Solução: Aplicando a formula $C = 2\pi r$ temos

$6 \times 3{,}14 = 18{,}84$

Resposta: O comprimento da circunferencia mede 18,84

2- Calcular o comprimento de uma circunferencia, sabendo-se que o lado do triangulo equilátero inscrito mede 6 m.

Solução: Aplicando a formula $r = \frac{l}{\sqrt{3}}$ temos

$$r = \frac{6m}{1,732} = 3,46$$

$C = 2r \times \pi$

$2r = 6,92 \times 3,14 = 21,7$ m.

Resposta: O comprimento da circunferencia é de 21,7 m.

10 - Num circulo está inscrito um quadrado, cuja diagonal mede 3 m. Calcular o comprimento da circunferencia do circulo.

Solução: Aplicando a formula $2r \times \pi$ temos:

$r = 1,5$ m, $2r = 3\,m \times 3,14 = 9,42$ m

Resposta: O comprimento da circunferencia é de 9,42 m

V. M.

Ginásio Santa Rita, 16 de Outubro de 1950

Comprimento

Ginásio Santa Rita, 16 de Outubro de 1950

Comprimento dos arcos do circulo

1º. O arco de n graus = $l = \frac{r\pi n}{180}$

2º. O arco de n' minutos = $l' = \frac{r\pi n'}{10.800}$

3º. O arco de n" segundos = $l'' = \frac{r\pi n''}{648.000}$

4.- Calcular o comprimento do arco de 40 gr, em uma circunferência de raio 8 m.

Solução:

Aplicando a formula $\frac{r\pi n}{180}$ temos:

$$\frac{8 \times 3,14 \times \cancel{40}^{2}}{\cancel{180}_{9}} = \frac{50,24}{9} = 5,582 \text{ m}$$

Resposta: O comprimento do arco é de 5,582 m

14 - Calcular o raio de uma circumferencia, cujo comprimento é de 21,98 m.

Solução: Aplicando a formula $r = \frac{C}{2\pi}$ temos:

$$\frac{21,98}{6,28} = 3,5 \text{ m}$$

Resposta: O raio da circumferencia mede 3,5 m.

20- A roda grande de uma engrenagem tem 75 cm. de raio e faz 900 voltas enquanto a pequena dá 1.500. Qual o raio da roda pequena?

Solução:

Circumferencia da roda grande = 1,50 x 3,14 = 4,710 m.

Distancia percorrida = 4,710 x 900 = 4.239 m

Circumferencia da roda pequena: $\frac{4.239}{1.500} = 2.826$ m

Raio da roda pequena = $\frac{C}{2\pi} = \frac{2.826}{6,28} = 45$ cm

Resposta: O raio da roda pequena mede 45 cm.

91