



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**WELKY KLEFSON FERREIRA DE BRITO**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS APOIADOS NO MEIO CONTÍNUO**  
**SOBRE SAPATA RÍGIDA**

**JOÃO PESSOA**

**2015**

**WELKY KLEFSON FERREIRA DE BRITO**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS APOIADOS NO MEIO CONTÍNUO  
SOBRE SAPATA RÍGIDA**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC),  
apresentado à Coordenação do Curso de  
Engenharia Civil e Ambiental como requisito  
parcial, para obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Civil.

**Orientador:** Professor Dr. José Márcílio  
Filgueiras Cruz

**JOÃO PESSOA**

**2015**

B862a

Brito, Welky Klefson Ferreira de

Análise estática de pórticos planos apoiados no meio contínuo sobre sapata rígida./ Welky Klefson Ferreira de Brito - João Pessoa, 2015.

50f. il.:

Orientador: Prof. Dr. José Márcilio Filgueiras Cruz

Monografia (Graduação em Engenharia Civil) / Centro de Tecnologia / Campus I / Universidade Federal da Paraíba - UFPB.

**WELKY KLEFSON FERREIRA DE BRITO**

**ANÁLISE ESTÁTICA DE PÓRTICOS PLANOS APOIADOS NO MEIO CONTÍNUO  
SOBRE SAPATA RÍGIDA**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC),  
apresentado à Coordenação do Curso de  
Engenharia Civil e Ambiental como requisito  
parcial, para obtenção do título de Bacharel em  
Engenharia Civil.

Aprovado em: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. José Márcilio Filgueiras Cruz (Orientador)  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

---

Prof. Dr. Enildo Tales Ferreira (Membro)  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

---

Prof. Me. Carlos Antônio Taurino de Lucena (Membro)  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

---

Prof<sup>a</sup>. Dra. Ana Claudia Fernandes Medeiros de Braga  
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

**Aos meus pais, Marcos Antônio de Brito  
Alves (in memoriam) e Gilvanete Ferreira  
de Brito.**

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus, pela presença em minha vida e por estar sempre guiando meus caminhos, toda honra e toda glória pertencem a ti Senhor.

Agradeço aos meus pais, Marcos Antônio de Brito Alves (in memoriam) e Gilvanete Ferreira de Brito, minha “mulher maravilha”, por terem sido exemplos de valor em minha vida e pelo amor, carinho, paciência e todo o esforço ao qual não mediram forças para me dedicar. Serei infinitamente grato por tudo que me deram e por todos os ensinamentos que me passaram.

Mãe, obrigado por todo amor, cuidado e força que a senhora sempre foi capaz de me dar, admiro imensamente a mulher guerreira e batalhadora que a senhora é. Obrigado pai por mesmo nas dificuldades ter dado toda sua saúde pela família; agradeço a Deus por ter tido o senhor como grande fonte de inspiração, és um exemplo a ser seguido. Amo vocês.

Ao professor e orientador José Marcílio Filgueiras Cruz por ter aceitado me orientar, conciliando seu tempo tão limitado a essa tarefa árdua e cansativa, a toda atenção dada, paciência, competência e dedicação que demonstrou por mim e por ser um exemplo de estímulo à pesquisa.

Ao professor Ângelo Vieira Mendonça por todo conhecimento passado durante parte da iniciação científica e graduação.

Agradeço a Thais Akemi Tokubo Sanomiya, por todo amor, carinho, compreensão e todo incentivo dado. Muito obrigado por sempre estar ao meu lado me ajudando, abrindo mão de seu tempo por mim e por me compreender. Agradeço a Deus por ter colocado você em minha vida, minha quinta dimensão... minha dimensão extra.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal da Paraíba, sem exceção, pelos ensinamentos e por contribuir de forma grandiosa para a minha formação.

Finalmente agradeço aos meus amigos de turma, em especial Daniel Félix Soares, Jairo Dutra Moreira e Paulo André Nunes Furtado pela amizade e por todo o apoio durante todos esses anos.

## RESUMO

O trabalho aqui desenvolvido tem por objetivo apresentar uma formulação direta do Método dos Elementos de Contorno, conhecido como MEC, para análise de pórticos planos, onde atuam cargas estáticas, interagindo diretamente com o solo, o meio considerado contínuo, estabelecendo representações algébricas para esse fim. Dessa forma foi levado em consideração as deformações que ocorrem no solo e que vão interagir diretamente com a estrutura reticulada. A esse problema dá-se o nome de interação solo-estrutura-fundação. Portanto, é estabelecido uma solução numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno para análise dessa interação, ou seja, a superestrutura e o solo serão modelados unicamente pelo MEC. É importante que haja essa Análise da Interação Solo-Estrutura, pois se trata de uma poderosa ferramenta para determinação dos deslocamentos reais que ocorrem na fundação assim como os esforços internos que lhes solicitam, onde em outros modelos que não a consideram podem estar interpretando o problema físico de forma errônea. Diante disso, deverá haver uma compatibilização entre os sistemas algébricos do pórtico plano e do solo para que seja possível haver tal interação entre as partes, tornando-os um sistema único. Para o problema do solo foram utilizadas as soluções fundamentais de Melan, do semi-plano infinito, onde é composta pela solução fundamental de Kelvin 2D somada a uma parte complementar, ao qual são apresentadas as soluções fundamentais para a sapata admitida como linear e rígida e ponto fonte e ponto-campo sobre a mesma reta. Por fim temos os exemplos calculados pela teoria, através de um algoritmo criado em linguagem C++, onde os pórticos planos analisador demonstraram dados satisfatórios.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno. Análise da Interação Solo-Estrutura. Solução Fundamental de Melan.



## ABSTRACT

The work developed aims to show the direct formulation of Boundary Element Method (BEM) to analyze flat porchs where act static loads, the latter interacting directly with the soil (considered continuum). Futhermore, we set up algebric representation to this purpose. In this way, we considered deformations in the soil, which will interact directly with the lattice structure, this problem is called the soil-structure-foudation interaction. Therefore, it is stablished numerical solution based in BEM, i.e, the superstructure and the soil will be molded only by the method. It is important to do the Soil-structure Interaction Analysis, because this is a powerful tool to define the real deslocation that occur in the foudation, such as the internal enforces that is applied, which other models do not consider, mistaking the physical problem. Moreover, it has to be a compatibilization between the flat porch's algebric system and the soil in order to have such interaction, becoming an unique system. To the soil's problem, was used the Melan's infinity half-plane fundamental solutions, that is composed by the Kelvin's 2D fundamental solutions added to a complementary part, which is presented the solutions of Shallow Foundation, regarded as linear and rigid, with the load-point and field-point in the same line. Finally, we calculated basic examples of the model throught an algorithm in C++, where the flat porchs' analyzer presented satisfactory data.

**Keywords:** Boundary Element Method. Soil-structure Interaction Analysis. Melan's fundamental solutions.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Barra sob efeito axial. ....	14
Figura 2 - Barra submetida à flexão, com carregamento no plano $xz$ . ....	17
Figura 3 - Sistemas de coordenadas para avaliação do efeito axial. (a) SCL para a avaliação da contribuição do efeito axial e (b) em relação ao SCLU. ....	22
Figura 4 - Sistemas de coordenadas para avaliação da contribuição da flexão. (a) SCL para a avaliação da contribuição da flexão e (b) em relação ao SCLU. ....	23
Figura 5 - SCLU de barra de pórtico plano. ....	26
Figura 6 - Coordenadas globais $OXY$ e coordenadas locais principais $Oxy$ . ....	27
Figura 7 - Pórtico plano. ....	28
Figura 8 - Problemas: real e fundamental 2D. ....	31
Figura 9 - Disco de raio infinito - Kelvin 2D. ....	32
Figura 10 - Cargas pontuais unitárias aplicadas dentro do semi-plano. ....	33
Figura 11 - Funções de interpolação. ....	36
Figura 12 - Colocação do ponto-fonte ( $x$ ) no elemento de contorno e medindo seu efeito sobre um ponto $x$ qualquer. ....	39
Figura 13 - Estrutura da fundação submetida aos efeitos de translação e rotação, onde $y = 0$ . ....	43
Figura 14 - Contribuição do elemento $el$ no cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata pilar. ....	45
Figura 15 - Ação e reação do solo na sapata. ....	46
Figura 16 - (a) Pórtico com cargas nos nós 3 e 4; (b) incidência das barras do pórtico (a); (c) discretização da sapata rígida. ....	50

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>13</b>
2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	13
2.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS .....	13
2.2.1 Efeito Axial .....	14
2.2.2 Efeito da flexão (teoria de Euler-Bernoulli) .....	17
2.3 UNIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS.....	21
2.3.1 Problemas independentes.....	21
2.3.2 Problemas Combinados .....	25
<b>3 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....</b>	<b>31</b>
3.1 A REPRESENTAÇÃO DO SOLO .....	31
3.1.1 Solução Fundamental de Kelvin 2D.....	32
3.1.2 Solução Fundamental de Melan .....	33
3.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PARA PONTOS DO DOMÍNIO .....	35
3.3 ACOPLAMENTO SOLO-SAPATA.....	42
3.4 ACOPLAMENTO SOLO-ESTRUTURA.....	45
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>49</b>
4.1 EXEMPLO .....	49
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>52</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O crescimento do setor da construção civil traz consigo a elaboração de edificações cada vez mais arrojadas e cada vez mais esbeltas, exigindo assim o desenvolvimento e melhoramento de técnicas construtivas e cálculos, além de requerer conhecimentos mais avançados por parte dos projetistas sobre a estabilidade dessas edificações. Dessa forma, a análise estrutural vem sendo feita considerando diversos efeitos, como por exemplo a interação pórtico-placas, pórtico-núcleo, solo-estrutura etc.

Na análise de diversos problemas físicos da engenharia estrutural, governado por equações diferenciais, a solução analítica só está disponível para casos restritos.

Nos demais a solução só é possível através do uso de métodos numéricos, que utilizam modelos discretos, com finitos graus de liberdade, em substituição aos modelos contínuos dos métodos analíticos (BARBIRATO, 1991, p. 1).

Destacam-se dentro das técnicas numéricas: o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Na última metade do século XX, com o avanço na área da tecnologia da computação, surgem eficientes ferramentas de cálculo, a partir de diversas técnicas numéricas de resolução de equações ou de sistemas de equações diferenciais, possibilitando a análise de diversos problemas de engenharia (CAVALCANTI, 2002). Assim as técnicas numéricas se apresentam, neste contexto, como alternativa promissora, uma vez que contribui para resolução de problemas práticos para os quais as soluções analíticas são de difícil obtenção ou de difícil aplicação ou simplesmente não existem, possibilitando não apenas uma grande flexibilidade de modelagem como também agilidade na obtenção da solução (CRUZ, 2012).

O Método dos Elementos Finitos começa a ser divulgado com o surgimento dos computadores eletrônicos, ferramenta indispensável ao MEF. Constitui no método mais utilizado para solução dos diversos problemas de engenharia, devido a simplicidade e a elegância da sua formulação, fato esse proporcionado pela intensa pesquisa realizada sobre o método. O MEF assim como o MDF, seu antecessor, aproxima a solução da equação diferencial que rege o problema físico, utilizando valores do domínio de validade, isto é, os valores das variáveis estão associados a pontos internos e de contorno do espaço em análise (CALDERON, 1996). Portanto, costuma-se denominá-los de “métodos de domínio”.

Posteriormente surge o Método dos Elementos de Contorno, denominado MEC após o trabalho de Brebbia (1978), como um procedimento numérico promissor para resolução de diversos problemas físicos usuais no campo da engenharia, ganhando espaço entre os mais conceituados pesquisadores e se tornando uma poderosa técnica de análise de problemas da Mecânica do Contínuo.

De forma sucinta, o MEC busca obter a solução de equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de equações integrais sobre o contorno. Assim o problema é reduzido em uma unidade suas dimensões, levando a menores quantidades de dados de entrada e menor sistema de equações finais, isso se deve ao fato de que no método a solução será calculada em pontos discretos, os nós, definidos unicamente sobre o contorno. Em contrapartida, a matriz do sistema é geralmente cheia e não simétrica (BARBIRATO, 1999).

Embora seja um método numérico recente, sua origem está ligada diretamente à evolução das técnicas de resolução de equações integrais, onde em 1823 o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 – 1829) foi o primeiro a deduzir as equações integrais para resolver o problema chamado “pêndulo isócrono”.

A ideia básica do MEC consiste na obtenção da equação integral de contorno através da transformação da equação diferencial do problema governante em uma equação integral equivalente, onde relaciona valores de contorno e possibilita a análise do problema (CRUZ, 2012). Torna-se necessário então ao MEC o conhecimento de uma solução fundamental, que representa a resposta em um ponto (chamado ponto-campo) do domínio infinito do problema congênere devido a aplicação de uma força unitária em um outro ponto (chamado ponto-fonte) do mesmo domínio infinito.

A Análise da Interação Solo-Estrutura (AISE) é um problema que vem recebendo especial atenção por parte dos pesquisadores em diversos centros de pesquisa, pois

[...] se constitui na melhor alternativa para a determinação dos deslocamentos reais da fundação bem como dos esforços internos que lhes solicitam, pois avalia a superestrutura, a infraestrutura e o meio de apoio, como um sistema único, no qual as três partes componentes trabalham acopladas (CRUZ, 2012, s/p).

De forma resumida, consiste no mecanismo de influência mútua entre superestrutura-fundação. Devido à concorrência entre as áreas responsáveis pelo sistema estrutural (área de estruturas) e a responsável pelo maciço de apoio (área da geotecnia) e também devido a

dificuldades encontrados nesse tipo de análise, vê-se que em muitos projetos estruturais a análise e avaliação dessas duas partes do sistema (solo-estrutura) é realizado em separado. O engenheiro estrutural considera que os apoios da superestrutura estejam engastados na base enquanto que o engenheiro de fundação admite que a fundação apresente um comportamento rígido e indeslocável, onde as reações de apoio da superestrutura serão utilizadas no dimensionamento dos elementos de fundação. Tal comportamento não condiz com a realidade física do problema, pois deslocamentos irão acontecer devido às deformações verificadas no elemento estrutural e no solo implicando em solicitações adicionais à superestrutura.

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma formulação direta pelo Método dos Elementos de Contorno, dedução de equações integrais, soluções fundamentais e representações algébricas, para análise estática de pórtico plano, apresentando uma estratégia conveniente de sequenciamento de sistemas de referência, e ainda sistematizar o problema da interação solo-estrutura, onde a superestrutura, o pórtico plano, e o solo, considerado um meio contínuo elástico semi-infinito, são modelados unicamente pelo MEC.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O Método dos Elementos de Contorno do ponto de vista de aplicações computacionais é o mais recente, embora seu desenvolvimento tenha ocorrido a partir da década de 1970.

O MEC consiste em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de uma equação integral sobre o contorno, conduzindo sempre a redução do problema analisado em uma dimensão, e gerando conseqüentemente menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento em muitos problemas e menor sistema de equações final. Por outro lado a matriz do sistema é geralmente cheia e não simétrica (BARBIRATO, 1991).

Dessa forma, o MEC necessita de uma solução fundamental, que representa a resposta em um ponto do domínio infinito devido à aplicação de força unitária em outro ponto do mesmo domínio.

### 2.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGÉBRICAS EM BARRAS

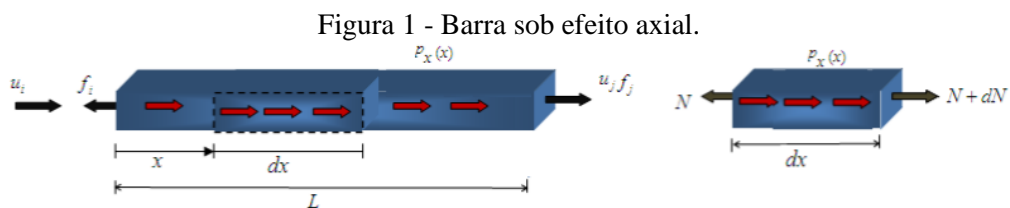
No problema dos pórticos planos as barras da estrutura serão estudadas sobre os efeitos: do esforço axial e da flexão. No caso da flexão será usado o modelo de Euler-Bernoulli, cujas hipóteses serão apresentadas a seguir:

- O problema tridimensional é aqui reduzido a apenas uma dimensão, uma vez que foi considerado que a maior dimensão do elemento de barra, seu comprimento, é muito maior que as outras duas;
- Barras com seção transversal uniforme e com planicidade mantida durante o processo de deformação;
- No regime estático, as cargas são aplicadas de tal modo que pode ser desprezado os efeitos da energia cinética;
- Material elástico linear, homogêneo e isótropo;
- Deformações transversais da seção (efeito Poisson) são desconsiderados;
- Pequenos deslocamentos e pequenas deformações, permitindo a superposição dos efeitos.

O estudo sobre os esforços atuantes nas barras será analisado em quatro etapas: o problema real; o problema fundamental; a representação integral; e por último a representação algébrica do esforço analisado.

### 2.2.1 Efeito Axial

Considerada a barra mostrada na Fig. 1 sob ação de um carregamento axial distribuído, definido por  $p_x(x)$ , é retirado um elemento de barra  $dx$ , com um esforço normal  $N$ .



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

- O Problema real

A partir da Fig. 1, retirado da barra um elemento  $dx$ , aplicando o equilíbrio de forças no elemento retirado, obtém-se:

$$\frac{dN}{dx} = -p_x(x) \quad (6)$$

Partindo da relação entre força, deformação e lei constitutiva, pode-se escrever a força normal como sendo:

$$N(x) = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (7)$$

Igualando a Eq. (6) a (7), tem-se como resultado a equação diferencial governante, Eq. (8).

$$EA \frac{d^2u(x)}{dx^2} + p_x(x) = 0 \quad (8)$$

- O Problema fundamental



O problema fundamental é caracterizado como um problema análogo ao problema real, porém com dimensões infinitas e submetido a fontes pontuais. Assim, de forma similar a Eq. (8), a equação governante do problema fundamental pode ser escrita como:

$$EA \frac{d^2 u^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -p_x^*(x, \hat{x}) \quad (9)$$

onde  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , sendo  $\delta(x, \hat{x})$  a delta de Dirac. Resolvendo a equação diferencial, Eq. (9), obtém-se a solução fundamental em termos de deslocamento (Cruz, 2012):

$$u^*(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2EA} |x - \hat{x}| \quad (10)$$

Para o esforço normal do problema fundamental, também de forma análoga ao problema real, obtém-se a Eq. (11):

$$N^*(x, \hat{x}) = EA \frac{du^*}{dx}(x, \hat{x}) = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (11)$$

sendo  $\text{sgn}(x - \hat{x})$  a função sinal.

- A representação integral

A equação integral é uma forma equivalente à equação diferencial governante do problema, que pode ser obtida mediante aplicação da técnica dos resíduos ponderados, conforme indicado a seguir:

$$\int_0^L [EA \frac{d^2 u}{dx^2} + p_x(x)] u^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (12)$$

onde  $u^*(x, \hat{x})$  é a função ponderadora de deslocamentos ou função peso.

Integrando convenientemente por partes a Eq. (12), substituindo pela Eq. (9) e aplicando-se as propriedades do delta Dirac, obtém-se a equação integral dos deslocamentos axiais:

$$\begin{aligned}
& u(\hat{x}) - u(0)N^*(0, \hat{x}) + u(L)N^*(L, \hat{x}) + N(0)u^*(0, \hat{x}) - N(L)u^*(L, \hat{x}) \\
& - \int_0^L [p_x(x)u^*(x, \hat{x})]dx = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Portanto, a Eq. (13) é a equação integral do problema em questão para pontos no domínio, onde há ainda que se calcular o termo das forças de corpo e requer os valores das soluções fundamentais.

- A representação algébrica

Para tornar o sistema solucionável uma transição da representação integral para representação algébrica deve ser feita. Isso é obtido fazendo-se colocações do ponto-fonte nas extremidades da barra, no contorno à esquerda e à direita. Obtém-se como resultado:

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^*(0, 0 + \xi) & N^*(L, 0 + \xi) \\ -N^*(0, L - \xi) & N^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L) \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -u^*(0, 0 + \xi) & u^*(L, 0 + \xi) \\ -u^*(0, L - \xi) & u^*(L, L - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ N(L) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_x(0) \\ f_x(L) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{14}$$

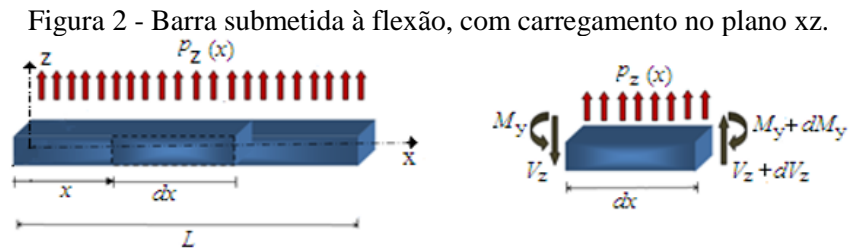
Através das Eq. (10) e (11), calculam-se os valores das soluções fundamentais nas extremidades da barra (para  $x = 0$  e  $x = L$ ). Assim a representação algébrica do esforço axial será (Cruz, 2012):

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_x \\ \alpha_x & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ \beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

onde  $\alpha_x = -1/2$ ,  $\beta_x = L/2EA$ ,  $f_{xi} = f_x(0) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x)x dx$  e  $f_{xj} = f_x(L) = \frac{1}{2EA} \int_0^L p_x(x)(-x + L) dx$ . Convém notar que os termos do vetor do carregamento  $f_{xi}$  e  $f_{xj}$  dependem da função que representa o carregamento  $p_x(x)$ . Se a distribuição for constante então esses termos ficam:  $f_{xi} = f_{xj} = \frac{L}{2EA}$ .

### 2.2.2 Efeito da flexão (teoria de Euler-Bernoulli)

Considerando agora a barra da Fig. 2 sob a ação do carregamento distribuído  $p_z(x)$ , do desforço cortante  $V_z$  e do momento fletor  $M_z$ , da mesma forma que para o efeito axial, será aqui separado um elemento de barra  $dx$  para análise.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

- O problema real

A partir do elemento de barra  $dx$ , como mostrado na da Fig. 2, pelo equilíbrio de forças e de momento, obtém-se, respectivamente:

$$\frac{dV_z}{dx} = -p_z(x) \quad (16)$$

$$V_z = \frac{dM_y}{dx} \quad (17)$$

Substituindo a Eq. (16) na (17), obtém-se a equação diferencial governante em esforços do problema real, dada por:

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} + p_z(x) = 0 \quad (18)$$

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli as deformações por cortante são desprezadas, resultando em distorção nula  $\gamma_{yz} = 0$ . Dessa forma, é considerado pequenas deformações e pequenos deslocamentos, onde a equação governante do problema de flexão em deslocamentos passa a ser:

$$EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = p_z(x) \quad (19)$$

- O problema fundamental

Assim como foi visto para o efeito axial, por analogia ao problema real a equação governante do problema fundamental será (Cruz, 2012):

$$EI_y \frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} = p_z^*(x, \hat{x}) \quad (20)$$

sendo  $p_x^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ , cuja solução é dada por CRUZ (2012):

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{L^3}{12EI_y} \left[ \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 + 2 \right] \quad (21)$$

Tem-se ainda, as demais soluções de interesse:

$$\phi^*(x, \hat{x}) = \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_y} \left[ \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (22)$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2} \left[ \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| - 1 \right] \quad (23)$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (24)$$

É necessário ainda as grandezas fundamentais oriundas da derivação no ponto-fonte ( $\hat{x}$ ) das Eq. (21) a (24) são:

$$w^*(x, \hat{x}) = \frac{L^3}{12EI_y} \left[ \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^3 - 3 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 + 2 \right]$$

$$\phi^*(x, \hat{x}) = \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} = -\frac{L^2}{4EI_y} \left[ \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right|^2 - 2 \left| \frac{x-\hat{x}}{L} \right| \right] \text{sgn}(x - \hat{x})$$

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = -\frac{L}{2} \left[ \left| \frac{x - \hat{x}}{L} \right| - 1 \right]$$

$$V_z^*(x, \hat{x}) = -EI_y \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \hat{x})$$

- A equação integral

Aplicando a técnica dos resíduos ponderados na Eq. (19), fica:

$$\int_0^L \left[ EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - p_z(x) \right] w^*(x, \hat{x}) dx = 0 \quad (25)$$

Integrando convenientemente por partes a Eq. (12), substituindo pela Eq. (9) e aplicando-se as propriedades do delta de Dirac, obtém-se a equação integral dos deslocamentos transversais (linha elástica):

$$\begin{aligned} w(\hat{x}) - [V_z(x)w^*(x, \hat{x})]_0^L + [M_y(x)\phi^*(x, \hat{x})]_0^L + [\phi(x)M_y^*(x, \hat{x})]_0^L \\ + [w(x)V_z^*(x, \hat{x})]_0^L - \int_0^L [p_z(x)w^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Uma vez que temos duas condições de contorno desconhecidas, torna-se necessário a obtenção de uma equação adicional. Isso pode ser feito derivando-se no ponto fonte a Eq. (26), resultando na equação da inclinação da elástica.

$$\begin{aligned} -\phi(\hat{x}) - [V_z(x)w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] - [M_y(x)\phi_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] + [\phi(x)M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] \\ + [w(x)V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x})] - \int_0^L [p_z(x)w^*(x, \hat{x})] dx = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

- A representação algébrica

A transição da representação integral para a algébrica requer a colocação do ponto fonte nas extremidades da barra, isto é em  $\hat{x} \rightarrow 0$  e  $\hat{x} \rightarrow L$  nas Eq. (26) e (27). Isto resulta no sistema a seguir:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} w(0) \\ -\phi(0) \\ w(L) \\ -\phi(L) \end{pmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -V_z^*(0,0+\xi) & -M_y^*(0,0+\xi) & V_z^*(L,0+\xi) & M_y^*(L,0+\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -V_z^*(0,L-\xi) & -M_y^*(0,L-\xi) & V_z^*(L,L-\xi) & M_y^*(L,L-\xi) \\ -V_{z,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -M_{y,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & V_{z,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & M_{y,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{pmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -w^*(0,0+\xi) & -\phi^*(0,0+\xi) & w^*(L,0+\xi) & \phi^*(L,0+\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,0+\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,0+\xi) \\ -w^*(0,L-\xi) & -\phi^*(0,L-\xi) & w^*(L,L-\xi) & \phi^*(L,L-\xi) \\ -w_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & -\phi_{,\hat{x}}^*(0,L-\xi) & w_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) & \phi_{,\hat{x}}^*(L,L-\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} f_z(0) \\ f_{z,\hat{x}}(0) \\ f_z(L) \\ f_{z,\hat{x}}(L) \end{pmatrix} \tag{28}
\end{aligned}$$

Após o cálculo das soluções fundamentais nas devidas colocações do ponto fonte a Eq. (28) toma a forma a seguir (CRUZ, 2012):

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{y1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w(0) \\ \phi(0) \\ w(L) \\ \phi(L) \end{pmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -\beta_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & -\beta_{y3} & -\beta_{y2} & 0 \\ 0 & \beta_{y2} & \beta_{y1} & 0 \\ -\beta_{y2} & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_z(0) \\ M_y(0) \\ V_z(L) \\ M_y(L) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{z1}(0) \\ f_{\phi1}(0) \\ f_{z1}(L) \\ f_{\phi1}(L) \end{pmatrix} \tag{29}
\end{aligned}$$

onde  $\alpha_{y1} = L/2$ ,  $\beta_{y1} = L^3/6EI_y$ ,  $\beta_{y2} = L^2/4EI_y$ ,  $\beta_{y3} = L/2EI_y$ ,  $f_{z1}(0) = \int_0^L p_z(x)w^*(x,0)dx$ ,  $f_{z1}(L) = \int_0^L p_z(x)w^*(x,L)dx$ ,  $f_{\phi1}(0) = -\int_0^L p_z(x)w^*_{,x}(x,0)dx$ ,  $f_{\phi1}(L) = -\int_0^L p_z(x)w^*_{,x}(x,L)dx$ . Convém notar que os termos do vetor de carga dependem da distribuição dos carregamentos ao longo da barra e que para o caso deles serem constantes, o vetor de carga fica:  $f_{z1}(0) = \frac{5L^4}{48EI_y}$ ,  $f_{z1}(L) = \frac{5L^4}{48EI_y}$ ,  $f_{\phi1}(0) = -\frac{L^3}{6EI_y}$ ,  $f_{\phi1}(L) = \frac{L^3}{6EI_y}$ .

## 2.3 UNIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Quando a estrutura é formada por barras inclinadas entre si a montagem do sistema final de equações pode requerer manipulações algébricas intermediárias muito trabalhosas. Por isso neste trabalho optou-se por uma estratégia de sequenciamento conveniente das contribuições de cada barra. A primeira etapa é associada a unificação dos sistemas de coordenadas locais (SCLU), que constitui uniformizar as direções dos graus de liberdade dos esforços para os de deslocamento. Em seguida adota-se um segundo sistema de referência, chamado de global (SCG), associado a cada barra e com as direções associadas a estrutura.

As grandezas grafadas com barra superior se referem ao SCLU enquanto sem barra SCL.

### 2.3.1 Problemas independentes

A seguir constam as representações algébricas dos efeitos independentes escritas com notação matricial para o SCL e SCLU, respectivamente.

$$\{u\} + [\hat{h}]\{u\} = [g]\{p\} + \{f\} \quad (30)$$

$$\{\bar{u}\} + [\bar{h}]\{\bar{u}\} = [\bar{g}]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (31)$$

onde

$$[\bar{h}] = [\eta_h]^{-1}[\hat{h}][\eta_h] \quad (32)$$

$$[\bar{g}] = [\eta_h]^{-1}[g][\eta_g] \quad (33)$$

$$\{u\} = [\eta_h]\{\bar{u}\} \quad (34)$$

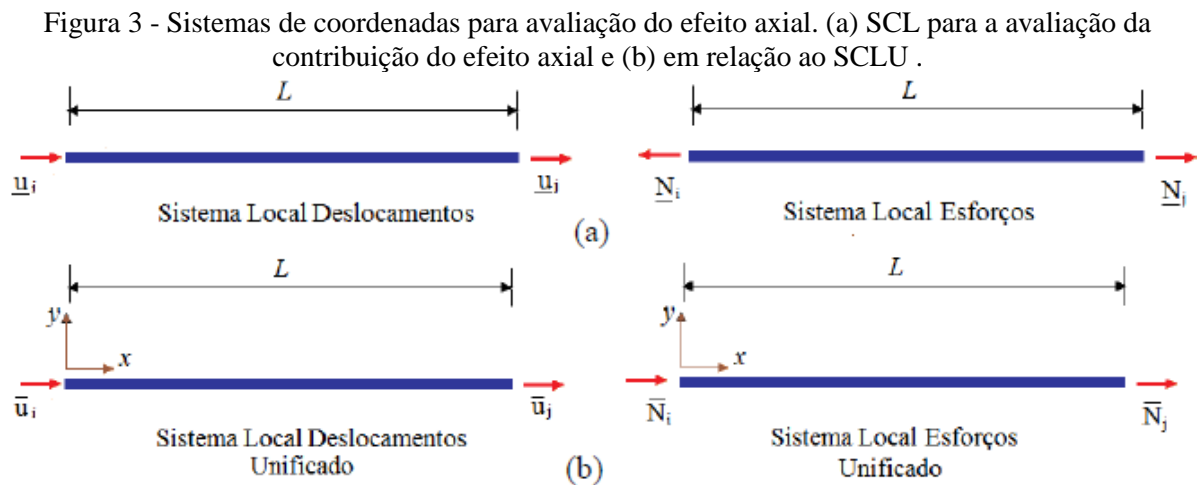
$$\{p\} = [\eta_g]\{\bar{p}\} \quad (35)$$

$$\{\bar{f}\} = [\eta_h]^{-1}\{f\} \quad (36)$$

sendo  $[\eta_h]$  e  $[\eta_g]$  operadores que relacionam os deslocamentos e esforços no SCL com os seus equivalentes no SCLU.

- Efeito axial

Na Fig. 3, são mostrados os SCL utilizados para análise do efeito axial na barra como elemento do pórtico e os SCLU adotados.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

Para os deslocamentos axiais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Já para as forças normais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Substituindo as Eq. (37) e (38) em (30) obtém-se a representação algébrica do efeito axial no SCLU.



$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \quad (39)$$

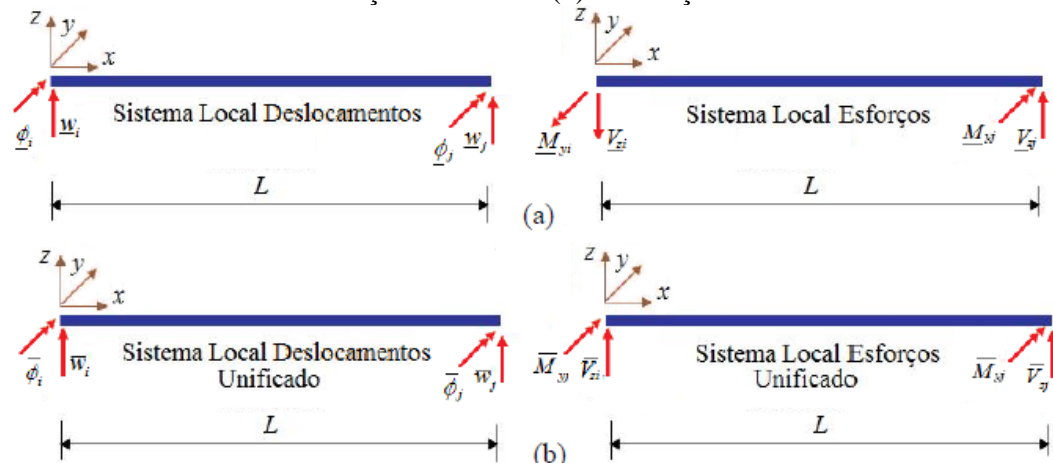
onde  $[\hat{h}] = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{bmatrix}$  e  $[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ , são as matrizes de influência da representação algébrica do efeito axial referidas ao SCL. Assim:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & \alpha_x \\ \alpha_x & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_x \\ -\beta_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{N}_i \\ \bar{N}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{xi} \\ \bar{f}_{xj} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

- Efeito da flexão

Na Fig. 4, são mostrados os SCL utilizados para análise do efeito da flexão na barra como elemento do pórtico e os SCLU adotados.

Figura 4 - Sistemas de coordenadas para avaliação da contribuição da flexão. (a) SCL para a avaliação da contribuição da flexão e (b) em relação ao SCLU.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

Para os deslocamentos transversais e suas inclinações, a transformação será

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ w_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} \quad (41)$$

e para as forças cortantes e momentos fletores, ficam:

$$\begin{Bmatrix} V_{zi} \\ M_{yi} \\ V_{zj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Substituindo as Eq. (38) e (42) na Eq. (30), fica:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} \\ \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33} & \hat{h}_{34} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43} & \hat{h}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{f}_{zi} \\ \bar{f}_{yi} \\ \bar{f}_{zj} \\ \bar{f}_{yj} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (43)$$

onde as matrizes de influência do efeito da flexão referidas ao SCL são:

$$[\hat{h}] = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \hat{h}_{13} & \hat{h}_{14} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \hat{h}_{23} & \hat{h}_{24} \\ \hat{h}_{31} & \hat{h}_{32} & \hat{h}_{33} & \hat{h}_{34} \\ \hat{h}_{41} & \hat{h}_{42} & \hat{h}_{43} & \hat{h}_{44} \end{bmatrix} \text{ e } [g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & -\alpha_{y1} & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \alpha_{y1} \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{\phi}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{\phi}_j \end{Bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \beta_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y1} \\ 0 & \beta_{y1} & -\beta_{y1} & 0 \\ 0 & -\beta_{y1} & \beta_{y1} & 0 \\ \beta_{y1} & 0 & 0 & \beta_{y1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V}_{zi} \\ \bar{M}_{yi} \\ \bar{V}_{zj} \\ \bar{M}_{yj} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{z1i} \\ \bar{f}_{\phi 1i} \\ \bar{f}_{z1j} \\ \bar{f}_{\phi 1j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{f}_{z2i} \\ \bar{f}_{\phi 2i} \\ \bar{f}_{z2j} \\ \bar{f}_{\phi 2j} \end{Bmatrix} \quad (44)
\end{aligned}$$

### 2.3.2 Problemas Combinados

A representação algébrica é feita inicialmente no sistema de coordenadas local unificado (SCLU) e em seguida é reescrito para o global (SCG). No SCLU será feito a superposição dos efeitos, Eq. (40) e (44), decorrentes da avaliação dos efeitos axial e do efeito de flexão em y. Dessa forma, o sistema algébrico do efeito combinado no SCLU será:

$$[I]\{\bar{u}\} + [\hat{h}]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (45)$$

$$[\hat{h}]\{\bar{u}\} = [g]\{\bar{p}\} + \{\bar{f}\} \quad (46)$$

Já para SCG:

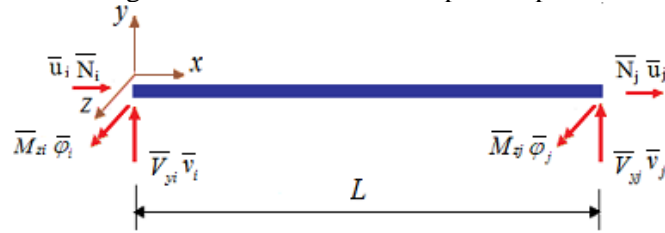
$$[I]\{U\} + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} \quad (47)$$

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F\} \quad (48)$$

- Barra de pórtico plano no SCLU

A Fig. 5 abaixo mostra a barra de pórtico plano no plano xz, cuja representação algébrica é obtida pela superposição das Eq. (41) e (44).

Figura 5 - SCLU de barra de pórtico plano.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

A representação algébrica no SCLU é dada por (Cruz, 2012):

$$\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \\ u_j \\ w_j \\ \phi_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \alpha_{y1} & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ \alpha_x & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -\alpha_{y1} \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \phi_i \\ u_j \\ w_j \\ \phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta_x & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{y1} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y2} \\ 0 & 0 & \beta_{y3} & 0 & -\beta_{y2} & 0 \\ \beta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{y2} & 0 & \beta_{y1} & 0 \\ 0 & -\beta_{y2} & 0 & 0 & 0 & \beta_{y3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ V_{zi} \\ M_{yi} \\ N_j \\ V_{zj} \\ M_{yj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{xi} \\ f_{z1i} \\ f_{\phi1i} \\ f_{xj} \\ f_{z1j} \\ f_{\phi1j} \end{bmatrix} \quad (49)$$

#### ▪ Barra de Pórtico Plano no SCG

Para que a representação algébrica do pórtico plano, seja obtida, é necessário que as contribuições advindas das barras, referidas a seus sistemas locais, possam ser convenientemente acumuladas de forma a descrever o comportamento da estrutura. Para isso, é necessário que haja transformações nos sistemas locais das barras, uma vez que estas transformações garantem que os vetores de cada extremidade das barras sejam somados algebricamente.

Dessa forma, os deslocamentos, esforços e forças de corpo no SCLU são correlacionados ao SCG da seguinte maneira:

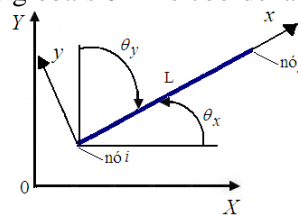
$$\{u\} = [R]\{U\} \quad (50)$$

$$\{p\} = [R]\{P\} \quad (51)$$

$$\{f\} = [R]\{F\} \quad (52)$$

A Figura 6 mostra as coordenadas locais em relação às globais.

Figura 6 - Coordenadas globais 0XY e coordenadas locais principais 0xy.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

A matriz de transformação para o pórtico plano é de ordem  $3.nno \times 3.nno$  e é representada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [C] \end{bmatrix} \quad (53)$$

onde,  $[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $[0]$  possui todos seus elementos nulos. Os elementos  $C_x$

e  $C_y$  correspondem aos cossenos diretores em relação ao SCG, sendo  $C_x = \cos\theta_x = \frac{X_j + X_i}{L}$ ,

$C_y = \cos\theta_y = \frac{Y_j + Y_i}{L}$  e  $L = \sqrt{(X_j + X_i)^2 + (Y_j + Y_i)^2}$ , comprimento da barra, como mostrado

na Fig. 6.

Substituindo as Eq. (50) a (52) na Eq. (45), obtém-se:

$$\{U\} + [R]^T[\hat{h}][R]\{U\} = [R]^T[g][R]\{P\} + [R]^T[R]\{F\} \quad (54)$$

e agora comparando a Eq. (54) com a Eq. (47), temos:

$$[\hat{H}] = [R]^T[\hat{h}][R], [G] = [R]^T[g][R] \text{ e } \{F\} = [R]^T\{f\} \quad (55)$$

▪ Representação Algébrica da Estrutura

Na representação algébrica da estrutura temos que levar em conta que quando duas ou mais barras convergirem para um único nó, deve-se isolar o nó e indicar as barras que convergem para ele. Além disso deverá ser levado em conta a continuidade dos deslocamentos e condições de equilíbrio.

Para a montagem do sistema global do pórtico plano, serão considerados duas barras convergentes no nó 3 e outras duas convergentes no nó 4, conforme Fig. 7. Dessa forma indica-se as barras (1), (2) e (3) sendo que, as barras (1) e (3) convergem para o nó 3 e as barras (2) e (3) para o nó 4.

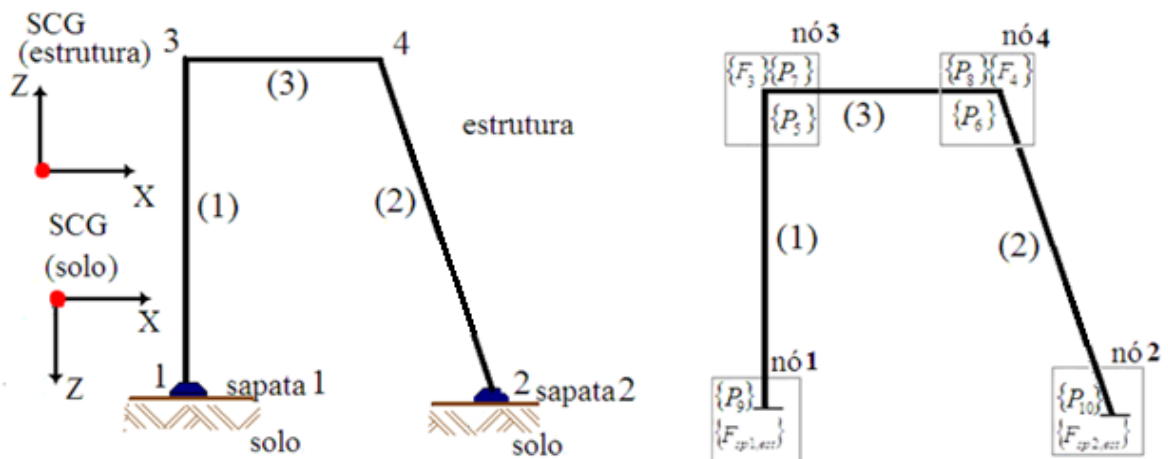
Assim, as representações algébricas para cada uma das barras no SCG, será:

$$\begin{cases} [H^{(1)}_{11}]\{U_1\} + [H^{(1)}_{12}]\{U_5\} = [G^{(1)}_{11}]\{P_9\} + [G^{(1)}_{12}]\{P_5\} \\ [H^{(1)}_{21}]\{U_1\} + [H^{(1)}_{22}]\{U_5\} = [G^{(1)}_{21}]\{P_9\} + [G^{(1)}_{22}]\{P_5\} \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} [H^{(2)}_{22}]\{U_6\} + [H^{(2)}_{23}]\{U_2\} = [G^{(2)}_{22}]\{P_6\} + [G^{(2)}_{23}]\{P_{10}\} \\ [H^{(2)}_{32}]\{U_6\} + [H^{(2)}_{33}]\{U_2\} = [G^{(2)}_{32}]\{P_6\} + [G^{(2)}_{33}]\{P_{10}\} \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} [H^{(3)}_{33}]\{U_7\} + [H^{(3)}_{34}]\{U_8\} = [G^{(3)}_{33}]\{P_7\} + [G^{(3)}_{34}]\{P_8\} \\ [H^{(3)}_{43}]\{U_7\} + [H^{(3)}_{44}]\{U_8\} = [G^{(3)}_{43}]\{P_7\} + [G^{(3)}_{44}]\{P_8\} \end{cases} \quad (58)$$

Figura 7 - Pórtico plano.



Fonte: CRUZ, 2012, s/p.

Dessa forma, de acordo com a Fig. 7, devemos aplicar as condições de compatibilidade de deslocamento em todos os nós, resultando em:

$$\{U_1\} = \{U_{sp1,est}\}$$

$$\{U_2\} = \{U_{sp2,est}\}$$

$$\{U_3\} = \{U_5\} = \{U_7\}$$

$$\{U_4\} = \{U_6\} = \{U_8\} \quad (59 a - d)$$

Deve-se garantir ainda as condições de equilíbrio do mesmo:

$$\{P_9\} + \{F_{sp1,est}\} = \{0\}$$

$$\{P_5\} + \{P_7\} = \{F_3\}$$

$$\{P_6\} + \{P_8\} = \{F_4\}$$

$$\{P_{10}\} + \{F_{sp2,est}\} = \{0\} \quad (60 a - d)$$

onde  $\{P_4\}$  e  $\{P_5\}$  correspondem aos vetores que contém os esforços à direita e à esquerda, respectivamente, do nó 2 e  $\{F\}$  contém as forças e momentos que são aplicadas diretamente neste nó.

Agora substituindo as Eq. (59) e (60) nas Eq. (56), (57) e (58), e reagrupando, obtemos o sistema algébrico da estrutura como pode ser visto abaixo.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
[H_{11}^{(1)}] & [0] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{12}^{(1)}] & -[G_{11}^{(1)}] & [0] \\
[H_{21}^{(1)}] & [0] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(1)}] & -[G_{21}^{(1)}] & [0] \\
[0] & [H_{33}^{(2)}] & [0] & [H_{32}^{(2)}] & -[G_{32}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{33}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [H_{43}^{(3)}] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & -[G_{43}^{(3)}] & -[G_{44}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [H_{23}^{(2)}] & [0] & [H_{22}^{(2)}] & -[G_{22}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{23}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] \\
[0] & [0] & [H_{33}^{(3)}] & [H_{34}^{(3)}] & [0] & -[G_{33}^{(3)}] & -[G_{34}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0]
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
\{U_1\} \\
\{U_2\} \\
\{U_3\} \\
\{U_4\} \\
\{P_6\} \\
\{P_7\} \\
\{P_8\} \\
\{P_9\} \\
\{P_5\} \\
\{P_{10}\}
\end{array} \right\} = \\
& \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[I] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[I] & [0]
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{F_3\} \\
\{0\} \\
\{F_4\} \\
\{F_{sp1,est}\} \\
\{F_{sp2,est}\}
\end{array} \right\}
\end{aligned}$$

(61)



### 3 INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

A estratégia para representação da interação solo-estrutura tem como principais características:

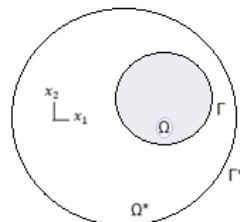
- O solo tomado como um semi-plano elástico, homogêneo e isótropo submetido a ações estáticas horizontais e verticais atuando na sua superfície;
- Sapata admitida como rígida, cada uma apoiando uma única barra;
- Forças de corpo desprezadas;
- A superestrutura é um pórtico plano modelado pelo MEC.

#### 3.1 A REPRESENTAÇÃO DO SOLO

Neste trabalho o solo será admitido como um problema contínuo elástico plano. Ainda cabe uma subdivisão nessa representação: na primeira o solo pode ser tomado como um corpo de domínio infinito. Aqui se enquadram os problemas nos quais o solo não está submetido a condições especiais tais como superfície livre de tensões. No segundo caso, tem-se a representação do solo via o conceito contínuo semi-plano.

Para que a fique bem definida a formulação do MEC é necessário o conhecimento da solução do problema fundamental, problema esse padrão da área que se deseja analisar, que é conhecido e particular, como será definido abaixo. Da Fig. 8, consideremos  $\Omega^*$  como sendo um domínio de um disco infinito cujo contorno é representado por  $\Gamma^*$  onde está contido um disco de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  que se deseja analisar. O problema particular é o indicado por asterisco e é chamado de problema fundamental. Neste trabalho, o problema que se deseja analisar está no plano.

Figura 8 - Problemas: real e fundamental 2D.



Fonte: FALTANDO

As equações do problema fundamental podem ser escritas como:

$$b_i^*(q) = \delta(q, s)\delta_{ki} \quad (62)$$

$$u^*_{ki,jj} + \frac{1}{1+2\nu} u^*_{ki,jj} + \frac{1}{G} \delta(q, s)\delta_{ki} = 0 \quad (63)$$

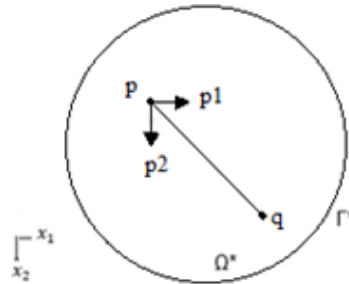
$$\sigma^*_{ij,j} + \delta(q, s)\delta_{ki} = 0 \quad (64)$$

Portanto o problema fundamental pode ter diferentes soluções de acordo com o espaço a que seu domínio  $\Omega^*$  e seu contorno  $\Gamma^*$  pertencem.

### 3.1.1 Solução Fundamental de Kelvin 2D

O problema fundamental de Kelvin foi desenvolvido por Lord Kelvin considerando sólidos bidimensionais elásticos, isotrópicos e homogêneos, cujo domínio tende ao infinito, onde podemos associar o problema a um disco de raio infinito com fontes pontuais aplicada em  $p$ , como mostra a Fig. 9.

Figura 9 - Disco de raio infinito - Kelvin 2D.



Fonte: FALTANDO

A solução fundamental de Kelvin 2D (LOVE, 1944) é definida por:

$$u^k_{ij} = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln r \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (65)$$

Nesse projeto é estudado apenas casos de estruturas apoiadas na superfície do solo. Isto implica que ambos pontos fonte e campo serão colocados apenas nessa superfície. Com isso as soluções fundamentais dadas na Eq. (65) podem ser reduzidas e mostradas como:

$$u_{22}^k = -\frac{(3-4\nu)}{8\pi G(1-\nu)} \ln r \quad (66)$$

$$u_{21}^k = \{0\} \quad (67)$$

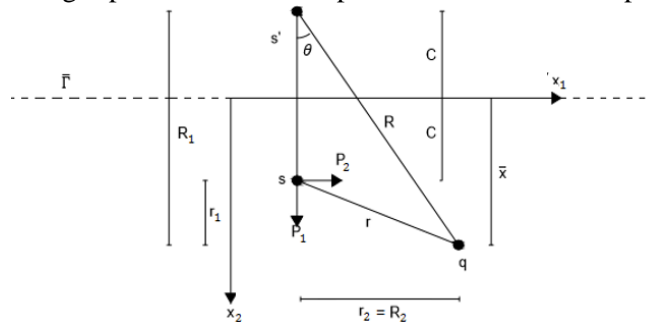
$$u_{12}^k = \{0\} \quad (68)$$

$$u_{11}^k = -\frac{(3-4\nu)}{8\pi G(1-\nu)} \ln r + \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \quad (69)$$

### 3.1.2 Solução Fundamental de Melan

O problema fundamental de Melan está associado a um corpo elástico de domínio semi-plano, cuja superfície é livre de tensões e submetido a fontes pontuais em seu interior, conforme mostra a Fig.10. As soluções desse problema apresentadas por Melan (1943) foram obtidas empregando-se ferramentas matemáticas mais avançadas.

Figura 10 - Cargas pontuais unitárias aplicadas dentro do semi-plano.



Fonte: TELLES e BREBBIA, 1980, s/p.

Telles e Brebbia (1980) obtiveram as mesmas expressões de Melan utilizando-se um caminho alternativo. Na proposição deles, o problema de Melan pode ser recuperado pela superposição do problema de Kelvin e de um problema complementar. Isto é:  $( )^M = ( )^k + ( )^c$ .

As expressões complementares, dadas por Telles e Brebbia (1980) correspondentes aos deslocamentos na direção  $j$  devido a ação de uma força unitária na direção  $i$  no domínio do problema, são dadas por:

$$u_{22}^c = K_d \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R + \frac{[(3-4v)R^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R^2}{R^4} \right\} \quad (70)$$

$$u_{21}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (71)$$

$$u_{12}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4v)r_1 r_2}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} + 4(1-v)(1-2v)\theta \right\} \quad (72)$$

$$u_{11}^c = K_d \left\{ -[8(1-v)^2 - (3-4v)] \ln R + \frac{[(3-4v)r^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} - \frac{4c\bar{x}r^2}{R^4} \right\} \quad (73)$$

onde:  $\theta = \arctg\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ ,  $r = (r_1 r_2)^{1/2}$ ,  $R = (R_1 R_2)^{1/2}$ ,  $r_i = x_i(q) - x_i(s)$ ,  $R_i = x_i(q) - x_i(s')$ ,  $c = x_1(s) \geq 0$ ,  $\bar{x} = x_1(q) \geq 0$ ,  $K_d = 1/[8\pi G(1-v)]$ ,  $s$  é o ponto fonte,  $q$  o ponto-campo e  $s'$  a imagem de  $s$ .

Quando a colocação do ponto fonte e a resposta no ponto-campo estão sobre a superfície livre, as Eq. (70) a (73) podem ser reduzidas a:

$$u_{22}^c = -\frac{(1-v)}{\pi G} \ln r + \frac{(3-4v)}{8\pi G(1-v)} \ln r \quad (74)$$

$$u_{21}^c = -\frac{(1-2v)}{2G} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (75)$$

$$u_{12}^c = \frac{(1-2v)}{2G} \operatorname{sgn}(x - \hat{x}) \quad (76)$$

$$u_{11}^c = -\frac{(1-v)}{\pi G} \ln r + \frac{(3-4v)}{8\pi G(1-v)} \ln r + \frac{(3-4v)}{8\pi G(1-v)} \quad (77)$$

$$\text{onde } \text{sgn}(x - \hat{x}) = \begin{cases} -1 \rightarrow x < \hat{x} \\ 1 \rightarrow x > \hat{x} \end{cases}.$$

Agora, somando as Eq. (66 a 69) e (74 a 77), obtem-se a solução fundamental de Melan, onde:

$$u_{22}^M = -\frac{(1-v)}{\pi G} \ln r \quad (78)$$

$$u_{21}^M = -\frac{(1-2v)}{2G} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (79)$$

$$u_{12}^M = \frac{(1-2v)}{2G} \text{sgn}(x - \hat{x}) \quad (80)$$

$$u_{11}^M = -\frac{(1-v)}{\pi G} \ln r + \frac{1}{2\pi G}. \quad (81)$$

### 3.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE CONTORNO PARA PONTOS DO DOMÍNIO

As equações integrais para pontos internos (do domínio) podem ser obtidas de diversas maneiras: através do Teorema da Divergência; por meio da técnica dos resíduos ponderados; através do Teorema da Reciprocidade ou de Betti; entre outras formas. A representação integral, conhecida como identidade Somigliana, é escrita da seguinte forma (Telles e Brebbia, 1980):

$$\begin{aligned} c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} p^*_{ij}(q,s)u_j(q)d\Gamma \\ = \int_{\Gamma} u^*_{ij}(q,s)p_j(q)d\Gamma + \int_{\Omega} u^*_{ij}(q)b_i(q)d\Omega \end{aligned} \quad (82)$$

onde  $c_{ij}$  caracteriza a natureza da localização do ponto, onde:

$$\begin{cases} c_{ij}(s) = 0 \rightarrow \text{para pontos fora do domínio } \Omega \\ c_{ij}(s) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{para pontos do contorno } \Gamma \\ c_{ij}(s) = 1 \rightarrow \text{para pontos internos ao domínio } \Omega \end{cases}$$

Como o problema em estudo refere-se apenas a pórticos planos apoiados na superfície do solo, pode-se utilizar o conceito de superfícies livres de tensão que a solução de Melan é associada implicando em  $p_{ij}^* = 0$  e se ainda for admitido o solo livre de forças volumétricas  $b_i = 0$  então a Eq. (83) pode ser reduzida a:

$$u_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^M p_j d\Gamma \quad (83)$$

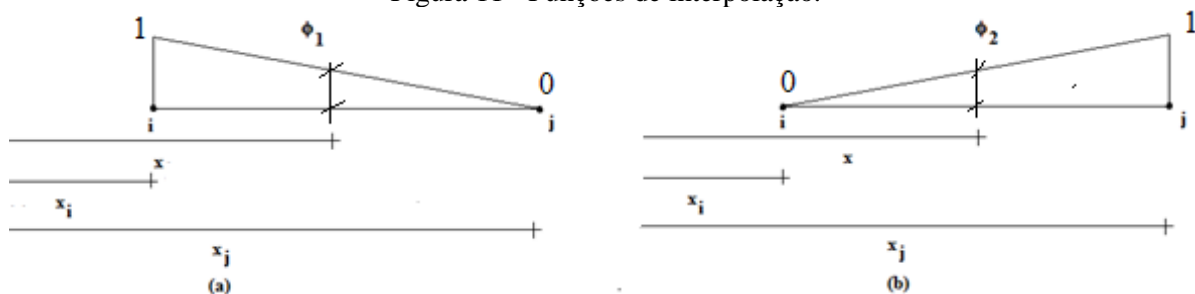
onde  $u_i$  representa a componente do deslocamento na direção  $i$ ,  $p_j$  a componente da força de superfície na direção  $j$ ,  $i$  e  $j$  variam de 1 a 2.

Admitindo que as forças de superfície sofram variação linear no domínio dos elementos de contorno linear, para cada elemento de contorno elas podem ser interpoladas como:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (84)$$

onde  $\{p_n^m\}$  são as forças de superfícies nodais nodais no nó  $n=1,2$  do elemento e  $m=1,2,3$  as coordenadas ou graus de liberdade em cada nó do elemento linear. As funções interpoladoras  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  estão indicadas na Fig. 11.

Figura 11 - Funções de interpolação.



Fonte: FALTANDO

Para  $\varphi_1$ , Fig. 11 (a), temos:

$$\frac{1}{x_j - x_i} = \frac{\varphi_1}{x_j - x} \rightarrow \varphi_1 = \frac{x_j - x}{L} = 1 - \frac{\bar{x}}{L} \quad (85)$$

onde  $\bar{x}$  é a coordenada global e  $\bar{x} = x - x_i$  e  $L = x_j - x_i$ . Já para  $\varphi_2$ , Fig. 11 (b), temos:

$$\frac{1}{x_j - x_i} = \frac{\varphi_2}{x - x_j} \rightarrow \varphi_2 = \frac{x - x_i}{L} = \frac{\bar{x}}{L} \quad (86)$$

Da explicitação da integral Eq. (83) obtemos:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{el_1}} \begin{bmatrix} u_{11}^M & u_{12}^M \\ u_{21}^M & u_{22}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\Gamma + \dots + \int_{\Gamma_{el_n}} \begin{bmatrix} u_{11}^M & u_{12}^M \\ u_{21}^M & u_{22}^M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (87)$$

onde  $n$  é o número de elementos discretizados. Substituindo a Eq. (84) na (87), obtém-se, para cada elemento de contorno:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma} u_{11}^M \varphi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^M \varphi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{11}^M \varphi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{12}^M \varphi_2 d\Gamma \\ \int_{\Gamma} u_{21}^M \varphi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^M \varphi_1 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{21}^M \varphi_2 d\Gamma & \int_{\Gamma} u_{22}^M \varphi_2 d\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (88)$$

As Eq. (88) podem ser reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (89)$$

onde  $g = \int u^* \varphi d\Gamma$ , sendo definidos abaixo:

$$g_{22} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_1 d\bar{x} \quad (90)$$

$$g_{21} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-2\nu)}{2G} \varphi_1 d\bar{x} \quad (91)$$

$$g_{24} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_2 d\bar{x} \quad (92)$$

$$g_{23} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-2\nu)}{2G} \varphi_2 d\bar{x} \quad (93)$$

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \varphi_1 d\Gamma = -g_{21} \quad (94)$$

$$g_{11} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \varphi_1 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_1 d\Gamma + \int_0^L \frac{1}{2\pi G} \varphi_1 d\Gamma \quad (95)$$

$$g_{14} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \varphi_2 d\Gamma = g_{21} \quad (96)$$

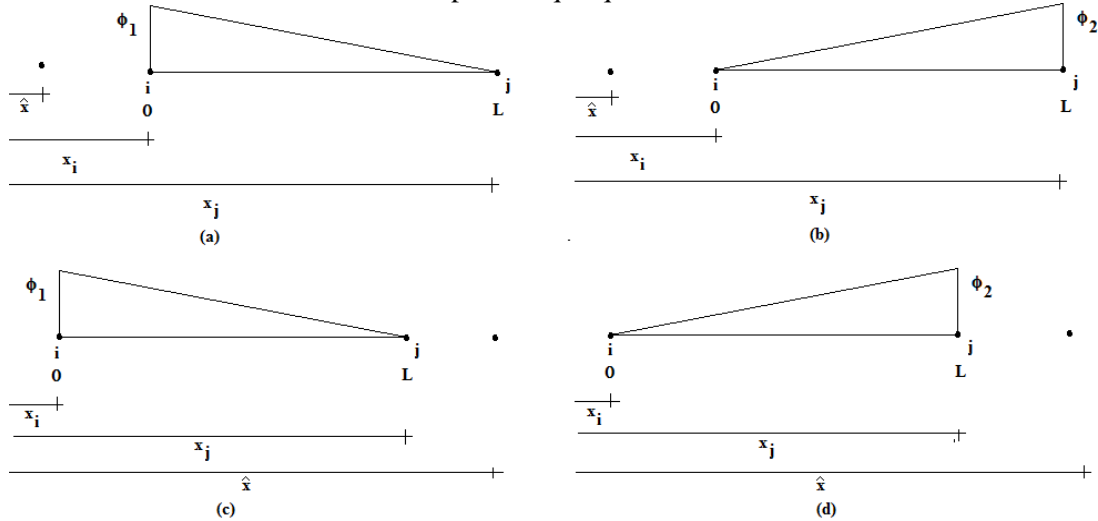
$$g_{13} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \varphi_2 d\Gamma = \int_0^L -\frac{(1-\nu)}{\pi G} \ln r \varphi_2 d\Gamma + \int_0^L \frac{1}{2\pi G} \varphi_2 d\Gamma \quad (97)$$

Torna-se necessário agora determinar o valor das integrais que aparecem nas Eq. (90) a (97). Atenção deve ser dada quanto a colocação do ponto fonte, que pode ser antes do elemento de contorno ou após, fazendo com que se definam valores para  $\hat{x} < \bar{x} + x_i$  e  $\hat{x} >$



$\bar{x} + x_i$ , conforme Fig. 12.

Figura 12 - Colocação do ponto-fonte ( $\hat{x}$ ) no elemento de contorno e medindo seu efeito sobre um ponto  $x$  qualquer.



Fonte: FALTANDO

Assim foram calculadas as integrais analiticamente para os dois intervalos abaixo:

A.  $\hat{x} < \bar{x} + x_i$

Sendo a figura 12 (a) e (b), temos que  $r = |x - \hat{x}|$ , onde  $\bar{x} = x - x_i$  e  $r = |\bar{x} + x_i - \hat{x}|$ . Dessa forma foram calculadas as integrais Eq. (98) a (99) conforme Fig. 12 (a) e (b), respectivamente.

$$\blacksquare \quad \varphi_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_1 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\bar{x} + x_i - \hat{x}) \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z = \bar{x} + x_i - \hat{x}$ ,  $a = x_i - \hat{x}$ ,  $b = x_j - \hat{x}$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , temos:

$$\int_a^b \ln z \left(\frac{a-z}{L} + 1\right) dz = -\frac{1}{L} [f_2(b) - f_2(a)] + \left(\frac{a}{L} + 1\right) [f_1(b) - f_1(a)] \quad (98)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left(\ln z - \frac{1}{2}\right)$ .

$$\blacksquare \varphi_2 = \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_2 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\bar{x} + x_i - \hat{x}) \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z = \bar{x} + x_i - \hat{x}$ ,  $a = x_i - \hat{x}$ ,  $b = x_j - \hat{x}$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , tem-se:

$$\int_a^b \ln z \left(\frac{z-a}{L}\right) dz = \frac{1}{L} [f_2(b) - f_2(a)] - \left(\frac{a}{L}\right) [f_1(b) - f_1(a)] \quad (99)$$

$$\text{onde } f_1(z) = z(\ln z - 1) \text{ e } f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left(\ln z - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{B. } \hat{x} > \bar{x} + x_i$$

Sendo a Fig. 12 (c) e (d), tem-se que  $r = |x - \hat{x}|$ , onde  $\bar{x} = x - x_i$  e  $r = |\hat{x} - x_i - \bar{x}|$ . Dessa forma foram calculadas as integrais Eq. (100) a (101) conforme Fig. 12 (c) e (d), respectivamente.

$$\blacksquare \varphi_1 = \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_1 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\hat{x} - \bar{x} - x_i) \left(1 - \frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z = \hat{x} - \bar{x} - x_i$ ,  $c = \hat{x} - x_i$ ,  $d = \hat{x} - x_j$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , tem-se:

$$- \int_c^d \ln z \left(\frac{z-c}{L} + 1\right) dz = -\frac{1}{L} [f_2(d) - f_2(c)] - \left(1 - \frac{c}{L}\right) [f_1(d) - f_1(c)] \quad (100)$$

$$\text{onde } f_1(z) = z(\ln z - 1) \text{ e } f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left(\ln z - \frac{1}{2}\right).$$

$$\blacksquare \varphi_2 = \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) \rightarrow \int_0^L \ln r \varphi_2 d\bar{x} = \int_0^L \ln r \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x} = \int_0^L \ln(\hat{x} - \bar{x} - x_i) \left(\frac{\bar{x}}{L}\right) d\bar{x}$$

Fazendo  $z = \hat{x} - \bar{x} - x_i$ ,  $c = \hat{x} - x_i$ ,  $d = \hat{x} - x_j$  e sendo  $L = x_j - x_i$ , tem-se:

$$- \int_c^d \ln z \left(\frac{c-z}{L}\right) dz = \frac{1}{L} [f_2(d) - f_2(c)] - \left(\frac{c}{L}\right) [f_1(d) - f_1(c)] \quad (101)$$

onde  $f_1(z) = z(\ln z - 1)$  e  $f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left( \ln z - \frac{1}{2} \right)$ .

Para a colocação do ponto fonte à esquerda do elemento de contorno, as funções  $F1(c,d)$  e  $F2(c,d)$  ficam:

- $a \geq 0$  e  $b \geq 0$

$$F1(a, b) = -[f_2(b) - f_2(a)] + (a + L)[f_1(b) - f_1(a)]$$

$$F2(a, b) = [f_2(b) - f_2(a)] - a[f_1(b) - f_1(a)] \quad (102 \ a - b)$$

Com  $a = -\hat{x} + x_i$  e  $b = -\hat{x} + x_j$ . Já para a colocação à direita do elemento as funções  $F1(c,d)$  e  $F2(c,d)$  ficam:

- $a < 0$  e  $b < 0$

$$F1(a, b) = -[f_2(b) - f_2(a)] + (a + L)[f_1(b) - f_1(a)]$$

$$F2(a, b) = [f_2(b) - f_2(a)] + a[f_1(b) - f_1(a)] \quad (103 \ a - b)$$

Dessa forma, os elementos  $g$  são finalmente:

$$g_{22} = -\frac{(1 - \nu)}{L\pi G} F1(a, b) \quad (104)$$

$$g_{21} = -\frac{(1 - 2\nu)L}{4G} \quad (105)$$

$$g_{24} = -\frac{(1 - \nu)}{L\pi G} F2(a, b) \quad (106)$$

$$g_{23} = -\frac{(1 - 2\nu)L}{4G} \quad (107)$$

$$g_{12} = -g_{21} \quad (108)$$

$$g_{11} = -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F1(a, b) + \frac{L}{4\pi G} \quad (109)$$

$$g_{14} = g_{21} \quad (110)$$

$$g_{13} = -\frac{(1-\nu)}{L\pi G} F2(a, b) + \frac{L}{4\pi G} \quad (111)$$

$$\text{onde } f_1(z) = z(\ln z - 1) \text{ e } f_2(z) = \frac{z^2}{2} \left( \ln z - \frac{1}{2} \right).$$

Para o solo temos a expressão algébrica  $\{\bar{U}_s\} = [\bar{G}_s]\{\bar{P}_s\}$ , obtida a partir da Eq. (89) e das Eq. (104 a 111) para todos os elementos, onde  $\{\bar{P}_s\}$  corresponde aos vetores das forças de superfície e  $\{\bar{U}_s\}$  dos deslocamentos de todos os nós dos elementos de contorno discretizados na superfície do solo. Escrevendo as forças de superfície em função dos deslocamentos, obtém-se:

$$\{\bar{P}_s\} = [\bar{T}]\{\bar{U}_s\} \quad (112)$$

onde  $[\bar{T}] = [\bar{G}_s]^{-1}$ .

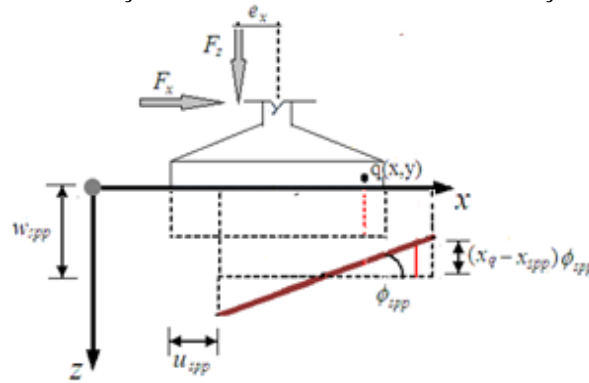
### 3.3 ACOPLAMENTO SOLO-SAPATA

Hipóteses a serem adotadas:

- A. Contato entre sapata e solo considerado ideal, ou seja, sem deslocamentos relativos na superfície de interação;
- B. Sendo elemento de fundação rígido, a cinemática dos pontos da interface sapata-solo se dá em duas descrições:
  - a) Translação pura;
  - b) Translação com rotação.

Para este trabalho, uma vez que a sapata é rígida e está sendo analisada no plano, haverá 2 translações e 1 rotação segundo as direções mostradas na Fig. 14. Os deslocamentos horizontal em  $x$  e vertical em  $z$  de um ponto de uma sapata ( $sp$ ) podem ser escritos respectivamente como:  $u_{sq}(x) = u_{spp}$ , e  $w_{sq}(x) = w_{spp} - (x_q - x_{spp})\phi_{spp}$ , onde  $u_{spp}$ ,  $w_{spp}$  e  $\phi_{spp}$  são, na ordem, o deslocamento horizontal em  $x$ , vertical em  $z$  e rotação em  $y$  no nó  $spp$  (ligação da sapata  $sp$  com pilar  $p$ ). O vetor  $\{\bar{U}_{spp}\}$  é composto por esse elementos e  $x_{spp}$  é a coordenada do ponto do locação do pilar na sapata  $sp$ , no sistema de coordenadas do solo, que é mostrado na Fig. 13.

Figura 13 - Estrutura da fundação submetida aos efeitos de translação e rotação, onde  $y = 0$ .



Fonte: FALTANDO

Escrevendo  $\{\bar{U}_s\}$  para cada um dos nós discretizados do solo, temos:

$$\{\bar{U}_s\}^T = [\{\bar{U}_{s1}\}^T \quad \{\bar{U}_{s2}\}^T \quad \dots \quad \{\bar{U}_{sq}\}^T \quad \dots \quad \{\bar{U}_{snno}\}^T] \quad (113)$$

onde  $\{\bar{U}_{sq}\}^T = [u_{sq} \quad w_{sq} \quad \phi_{sq}]$ ,  $q$  representa o nó genérico e varia de 1 a  $nno$  (total de nós discretizados no solo). Escrevendo o vetor  $\{\hat{U}_s\}$  para cada sapata da fundação, temos:

$$\{\hat{U}_s\}^T = [\{\hat{U}_{s1}\}^T \quad \{\hat{U}_{s2}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{ssp}\}^T \quad \dots \quad \{\hat{U}_{snsp}\}^T] \quad (114)$$

onde  $\{\hat{U}_{ssp}\}^T = [u_{spp} \quad w_{spp} \quad \phi_{spp}]$ ,  $sp$  representa a sapata genérica e varia de 1 a  $nsp$  (total de sapatas da fundação). Assim:

$$\{\bar{U}_s\} = [D]\{\hat{U}_s\} \quad (115)$$

$$\text{onde } [D] = \begin{bmatrix} [D_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [D_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [D_{sp}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [D_{nsap}] \end{bmatrix}, [D_{sp}] = \begin{bmatrix} [D_{1sp}] \\ [D_{2sp}] \\ \dots \\ [D_{qsp}] \\ \dots \\ [D_{nnosp}] \end{bmatrix} \text{ e } [D_{qsp}] =$$

$[I] \ [D_{Rsp}]$ , com  $[D_{Rsp}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_q - x_{spp} \end{bmatrix}$ . Notar que a dimensão da matriz  $[D]$  é  $(2n_{nos} \times 3n_{sap})$ , da matriz  $[D_{sp}]$  é  $(2n_{nos} \times 4)$ , da matriz  $[D_{qsp}]$  é  $(2 \times 4)$  enquanto a matriz  $[I]$  é de ordem 2. Combinando a Eq. (112) com a Eq. (115), obtém-se a representação algébrica do solo em termos das forças de superfície por unidade de comprimento:

$$\{P_s\} = [H]\{\hat{U}_s\} \quad (116)$$

onde  $[H] = [T][D]$ . Para as forças nodais concentradas  $\{F_s\}$  que são obtidas do produto das matrizes  $[Q]$  e  $\{P_s\}$ , onde  $[Q]$  é a matriz de transformação quadrada de ordem  $2n_{nos}$ , tem-se:

$$\{F_s\} = [Q]\{P_s\} = [Q][H]\{\hat{U}_s\} = [R]\{\hat{U}_s\} \quad (117)$$

onde  $[R] = [Q][H]$ . Para o elemento de contorno linear, tem-se:

$$\{\bar{F}_{el}\} = [Q_{el}]\{\bar{P}_{el}\} \quad (118)$$

onde  $\{\bar{F}_{el}\}^T = \{\{\bar{F}_{el}^1\}^T \ \{\bar{F}_{el}^2\}^T\}$  e  $\{\bar{P}_{el}\}^T = \{\{\bar{P}_{el}^1\}^T \ \{\bar{P}_{el}^2\}^T\}$  sendo que cada vetor-elemento  $\{\bar{F}_{el}^i\}^T$  e  $\{\bar{P}_{el}^i\}^T$ , com  $i=1,2$ , representam as forças concentradas e as de superfície aplicadas em cada nó do elemento de contorno. Pode-se fazer ainda  $\{\bar{F}_{el}^i\}^T = [\bar{F}_{xel}^i \ \bar{F}_{yel}^i]^T$  e  $\{\bar{P}_{el}^i\}^T = [\bar{P}_{xel}^i \ \bar{P}_{yel}^i]^T$ , onde os índices sobescritos se referem a direção da força. A matriz  $[Q_{el}]$  pode ser definida como:

$$[Q_{el}] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (119)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento de contorno. As forças que atuam no solo sob cada sapata produzem resultantes de forças e momentos individuais nos respectivos nós spp, sendo definidas por:

$$\{\bar{F}_s\} = [\hat{R}]\{\hat{U}_s\} \quad (120)$$

sendo  $[\hat{R}] = [C][R]$ .

Figura 14 - Contribuição do elemento el no cálculo das forças e momentos resultantes no nó de ligação sapata pilar.



Fonte: FALTANDO

De forma explícita, podemos escrever a matriz  $[C]$  como indicado abaixo.

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] & [0] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [C_2] & \dots & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [C_{sp}] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & [0] & \dots & [0] & \dots & [C_{nsap}] \end{bmatrix} \quad (121)$$

onde a submatriz da  $sp$ -ésima sapata é  $[C_{sp}] = [D_{sp}]^T$ . Assim pode-se exibir as forças e momentos resultantes no nó de ligação da sapata com o pilar a partir da contribuição de cada elemento da sapata através da Eq. (122) .

$$\begin{Bmatrix} F_{xsp} \\ F_{zsp} \\ M_{zsp} \end{Bmatrix} = \sum_{el}^{nel} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_q - x_{spp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xel}^1 \\ F_{zel}^1 \\ F_{xel}^2 \\ F_{zel}^2 \end{Bmatrix} \quad (122)$$

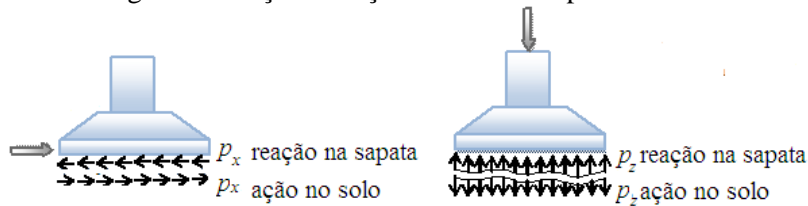
### 3.4 ACOPLAMENTO SOLO-ESTRUTURA

Para que o problema final (montagem do sistema de equações, da interação solo-estrutura) fique bem definido, torna-se necessário fazer o acoplamento das contribuições definidas nos tópicos anteriores, tanto por parte da estrutura quanto do solo. Dessa forma tem

de haver uma compatibilização dos deslocamentos e deve ser garantido o equilíbrio de forças em cada nó da ligação sapata pilar (ssp) com os deslocamentos e forças no nó  $k$  da estrutura ao qual está ligado o pilar na sapata  $sp$ .

Anteriormente foram calculadas as forças resultantes no nó ssp de cada sapata devido as ações atuantes no solo. Assim tais forças devem ter seus sentidos invertidos para que tenhamos as forças reativas do solo na sapata, pois dessa forma iremos garantir o equilíbrio de forças e momentos em cada apoio da estrutura, conforme Fig. 15.

Figura 15 - Ação e reação do solo na sapata.



Fonte: FALTANDO

$$\{\hat{F}_{spp}\} = [\Delta_{sr}]\{\tilde{F}_{spp}\} \quad (123)$$

onde  $\{\hat{F}_{spp}\}$  é o vetor das resultantes de forças atuantes no solo, calculadas para o nó  $sp$  de cada sapata,  $\{\tilde{F}_{spp}\}$  é o vetor das forças oriundas do solo, que atuam na base do pilar que se liga à sapata, e  $[\Delta_{sr}] = -1[I]$ , com  $n = 3$ . O próximo passo é unificar os sistemas de coordenadas, uma vez que o SCG (sistema de coordenadas global) do solo e da estrutura são diferentes, eixo vertical do SCG da estrutura apontado para cima e do solo apontado para baixo, ao qual será feito da seguinte forma:

$$\{\tilde{F}_{spp}\} = [\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\} \quad (124)$$

Somando a Eq. (123) com a Eq. (124) obtém-se uma expressão para o cálculo direto do vetor  $\{F_{spp,est}\}$ :

$$\{\hat{F}_{spp}\} = [\Delta_{sr}][\Delta_{se}]\{F_{spp,est}\}$$

ou ainda

$$\{F_{spp,est}\} = -[\Delta_{se}]\{\hat{F}_{spp}\} \quad (125)$$



onde  $[\Delta_{se}]$  é a matriz de ordem 3x3 dada por:  $[\Delta_{se}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Também se torna útil que reescrevamos os deslocamentos no nó de ligação sapata pilar da sapata  $sp$  para que possamos aplicar a compatibilidade de deslocamentos. A expressão é:

$$\{U_{spp,est}\} = [\Delta_{se}]\{U_{ssp}\} \quad (126)$$

Assim os vetores dos esforços e deslocamentos referidos ao SCG da estrutura, associados ao nó  $p$  e ao nó  $k$  correspondente, são:

$$\{U_{spp,est}\}^T = [u_{spp,est} \quad w_{spp,est} \quad \varphi_{spp,est}] \quad (127)$$

$$\{F_{spp,est}\}^T = [F_{xspp,est} \quad F_{zspp,est} \quad M_{zspp,est}] \quad (128)$$

$$\{U_k\}^T = [U_k \quad W_k \quad \varphi_k] \quad (129)$$

$$\{F_k\}^T = [F_{xk} \quad F_{zk} \quad M_{zk}] \quad (130)$$

As relações entre as forças reativas do solo e os deslocamentos na sapata podem ser obtidas a partir da Eq. (120), (125) e (126) resultando em:

$$\{P_{sp1,est}\} = [R_{sp11}]\{U_{sp1,est}\} + [R_{sp12}]\{U_{sp2,est}\}$$

$$\{P_{sp2,est}\} = [R_{sp21}]\{U_{sp1,est}\} + [R_{sp22}]\{U_{sp2,est}\} \quad (131 \text{ a} - \text{ b})$$

Então substituindo Eq. (131 a – b) nas Eq. (60) e ainda com as equações de compatibilidade de deslocamento Eq. (59 a – d) e equilíbrio Eq. (60 a – d), obtém-se finalmente o sistema algébrico da interação solo-estrutura:

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cccccccccc}
[H_{11}^{(1)}] & [0] & [H_{12}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{12}^{(1)}] & -[G_{11}^{(1)}] & [0] \\
[H_{21}^{(1)}] & [0] & [H_{22}^{(1)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{22}^{(1)}] & -[G_{21}^{(1)}] & [0] \\
[0] & [H_{33}^{(2)}] & [0] & [H_{32}^{(2)}] & -[G_{32}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{33}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [H_{43}^{(3)}] & [H_{44}^{(3)}] & [0] & -[G_{43}^{(3)}] & -[G_{44}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [H_{23}^{(2)}] & [0] & [H_{22}^{(2)}] & -[G_{22}^{(2)}] & [0] & [0] & [0] & [0] & -[G_{23}^{(2)}] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [I] & [0] \\
[0] & [0] & [H_{33}^{(3)}] & [H_{34}^{(3)}] & [0] & -[G_{33}^{(3)}] & -[G_{34}^{(3)}] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \\
[R_{sp11}] & [R_{sp12}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[R_{sp21}] & [R_{sp22}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0]
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
\{U_1\} \\
\{U_2\} \\
\{U_3\} \\
\{U_4\} \\
\{P_6\} \\
\{P_7\} \\
\{P_8\} \\
\{P_9\} \\
\{P_5\} \\
\{P_{10}\}
\end{array} \right\} = \\
& \left[ \begin{array}{cccccccccc}
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [I] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\
[0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0]
\end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l}
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{0\} \\
\{F_3\} \\
\{0\} \\
\{F_4\} \\
\{0\} \\
\{0\}
\end{array} \right\} \quad (132)
\end{aligned}$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste tópico serão apresentados os resultados das análises estáticas realizadas em pórticos planos a partir da formulação do MEC proposta neste trabalho. A teoria de Euler-Bernoulli será utilizada e será feito também uma análise da interação solo-estrutura. Os resultados obtidos serão validados a partir daqueles apresentados na literatura referente à análise estrutural, calculados analiticamente.

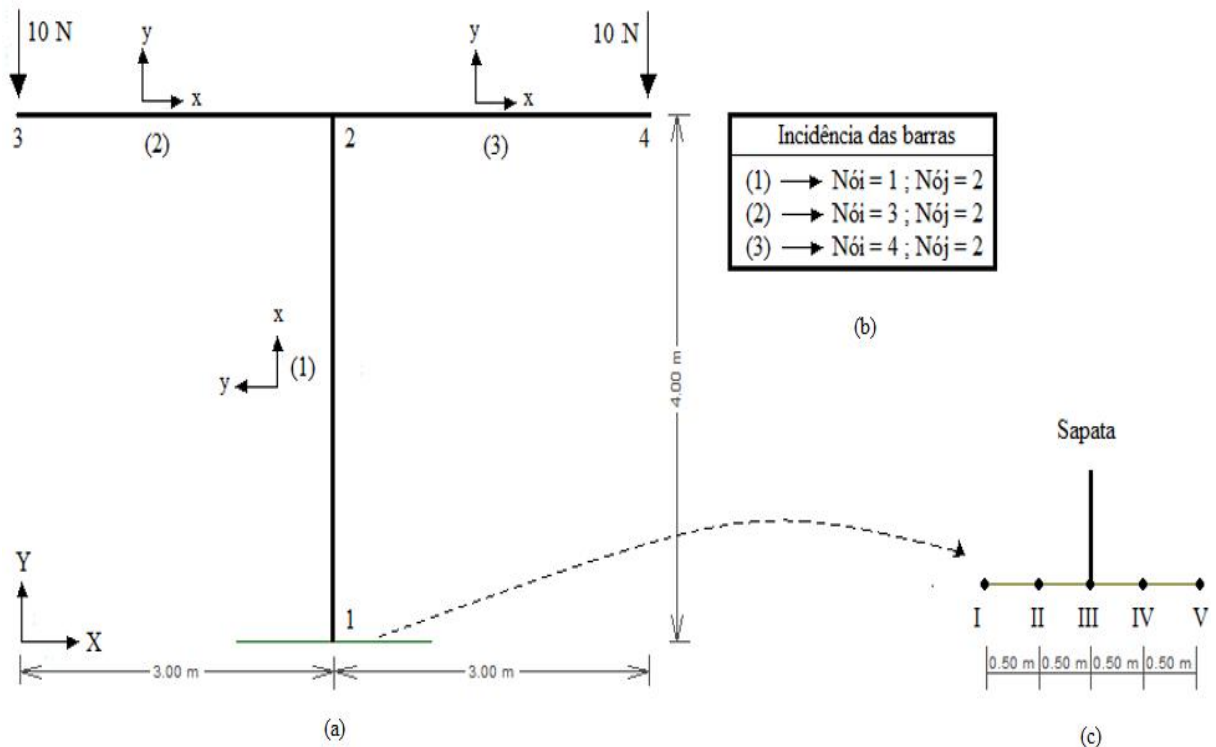
### 4.1 EXEMPLO

Temos como exemplo o pórtico plano da Fig. 16, onde: as barras horizontais tem 3,00 m e a vertical tem 4,00 m;  $E = 28$  GPa e  $G = 14$  GPa. O solo é considerado um meio contínuo semi-plano infinito, onde seu módulo de elasticidade é 2 MPa e o coeficiente de Poisson 0,5. Na estrutura está sendo aplicado um carregamento nodal de 10 N como indicado na Fig. 16.

Para os resultados obtidos, temos que  $F$  e  $M$  representam as forças e momentos, respectivamente, os deslocamentos são representados por  $D$ , a rotação em torno de  $y$  é representado por  $\phi$ , os índices  $X$  e  $Y$  indicam os eixos do SCG enquanto que  $x$  e  $y$  representam o SCL,  $Nói$  e  $Nój$  correspondem ao nó inicial e final, respectivamente. Assim utilizando o código computacional em C++ desenvolvido durante a etapa do projeto.

Na Tab. 1 estão mostrados os resultados obtidos no sistema local de coordenadas para os esforços atuantes na estrutura, onde a incidência de cada barra do pórtico, assim como o sentido dos eixos locais, é mostrada na Fig. 16 a-b. A discretização da sapata é mostrada na figura 16-c. Já na Tab. 2 são mostrados os deslocamentos no sistema local de coordenadas.

Figura 16 - (a) Pórtico com cargas nos nós 3 e 4; (b) incidência das barras do pórtico (a); (c) discretização da sapata rígida.



Fonte: FALTANDO

Tabela 1. Esforços locais

Barra	Fx (kN)		Fy (kN)		M (kN)	
	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
1	20	-20	0	0	0	0
2	0	0	-10	10	0	-30
3	0	0	10	-10	30	0

Fonte: Elaboração própria.

Tabela 2. Deslocamentos locais

Barra	Dx (mm)		Dy (mm)		$\phi$ rad	
	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>	Nó <i>i</i>	Nó <i>j</i>
1	-4,7324E-05	-5,6848E-05	0	0	0	0
2	0	0	-1,4854E-03	-5,6848E-05	7,1428E-04	0
3	0	0	-5,6848E-05	-1,4854E-03	0	-7,1428E-04

Fonte: Elaboração própria.

O exemplo proposto tem simetria tanto de geometria quanto de carregamento. Dessa forma é esperada respostas simétricas do ponto de vista de deslocamentos e esforços. Conforme pode ser observado nas Tab. 1 e 2 tais comportamentos foram representados pelos resultados. Por exemplo, deslocamentos transversais nos nós 3 e 4 foram obtidos. Além disso a rotação nula nas extremidades das barras que convergem para o nó 2 também foi verificado. Os equilíbrios tanto em momento quanto em forças foram recuperados pelo MEC.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposta uma análise da interação pórtico plano apoiado na superfície de um semi-plano modelado pelo Método dos Elementos de Contorno. Os resultados sugerem uma boa eficiência do método e confirma sua elegância de reduzir a dimensionalidade do problema em uma dimensão. Por exemplo, as barras do pórtico foram representadas por elementos de contorno pontuais e interface de contato da sapata com o solo (admitido como semi-plano) foi representada por elementos de contorno lineares discretizados apenas nas superfícies de contato com as sapatas.

Convém notar que se essa análise fosse feita por elementos finitos o pórtico seria representado por elementos unidimensionais e o solo representado por elementos finitos planos. Nesse caso a discretização do solo (que é um semi-plano infinito) requereria um grande número de elementos para mapear todo o domínio desse espaço.

## REFERÊNCIAS

BARBIRATO, J. C. C. **Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin**. 1991. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas)– Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.

\_\_\_\_\_. **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento**. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BREBBIA, C. A. Weight residual classification of approximate methods. **Journal of Computational and Applied Mathematical Modelling**, v. 2, n. 3, 1978.

CALDERÓN, E. T. **Sobre o uso do método dos elementos de contorno-mec para o estudo de interação de placas com o meio contínuo**. Tese (Doutorado em Engenharia)– Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

CAVALCANTI, M. C. R. **Análise por elementos de contorno de meios poro elásticos saturados pela teoria de Biot**. 2002. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil)– Universidade do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

CRUZ, J. M. F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno**. João Pessoa, 2012.

LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. 1994.

MELAN, E. Der spannungszustand der durch eine einzelkraft in innern beanspruchten halbscheibe. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 12, p. 343-346, 1932.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. Boundary Element Solution for Half-Plane Problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, p. 1149-115, 1980.