



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL  
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Análise da Influência de Cargas/Massas Móveis em Barras Utilizando  
o Método dos Elementos Finitos

Matheus Andrade Ferreira Sobrinho  
Engenharia Civil/ CT

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, CT / Centro de  
Tecnologia

Universidade Federal da Paraíba, 1 de Novembro de 2017

Matheus Andrade Ferreira Sobrinho

**Análise da Influência de Cargas/Massas Móveis em Barras Utilizando o  
Método dos Elementos Finitos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Graduação em Engenharia Civil, da Universidade Federal da Paraíba, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, como um dos requisitos para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil

Orientador: Prof. Ângelo Vieira Mendonça

01 de Novembro de 2017

F383a Ferreira Sobrinho, Matheus Andrade

Análise da Influência de Cargas / Massas Móveis em Barras Utilizando o Método dos Elementos Finitos. Matheus Andrade Ferreira Sobrinho – João Pessoa, 2017.

53f.: il.;

Orientador: Prof. Ângelo Vieira Mendonça.

Monografia (Curso de Graduação em Engenharia Civil) Campus I - UFPB / Universidade Federal da Paraíba.

1. Arcos Abatidos 2. MEF 3. Cargas Móveis 4. Massas Móveis

BS/CT/UFPB

CDU: 2.ed. 62 (043.2)

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

**MATHEUS ANDRADE FERREIRA SOBRINHO**

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DE CARGAS/MASSAS MÓVEIS EM BARRAS  
UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Trabalho de Conclusão de Curso em 01/12/2017 perante a seguinte Comissão Julgadora:

ANGELO VIEIRA MENDONÇA

nome do professor orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

APROVADO

ROBERTO LUIZ VIEIRA M - M

nome do professor membro 1

Instituição DCA-CT/UFPB

APROVADO

Antonio Bezerra

nome do professor membro 2

Instituição

DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

APROVADO

Ana Cláudia

Profª. Ana Cláudia Fernandes Medeiros Braga

Matrícula Siape: 1668619

Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente aos meus pais e ao meu irmão, que me deram muito amor durante toda minha vida. Eles são responsáveis pelo meu otimismo e fé na humanidade.

Ao professor orientador, pela paciência, profissionalismo e imensa dedicação à engenharia. Este afinco do professor é algo que percebi em poucas pessoas durante minha vida e uma característica que considero inerente à genialidade.

Aos amigos do peito e à grande família: tios, primos e avós.

Aos amigos pesquisadores do LamFic, por todo apoio e conselhos durante minha pesquisa.

Agradeço também a todos os professores de engenharia civil, pois estou certo que aprendi algo com cada um.

## RESUMO

Com o desenvolvimento de procedimentos de cálculo e técnicas construtivas, as estruturas atingiram dimensões cada vez mais ousadas, requerendo por parte da comunidade técnica estudos mais detalhados sobre a estabilidade dessas construções. O projeto estrutural se compõe basicamente de três etapas: análise estrutural, dimensionamento e detalhamento dos elementos estruturais. Na fase de análise estrutural é que são levantadas as ações que atuam na estrutura e se determinam os efeitos dessas em termos de solicitações (esforços), deslocamentos e deformações, características vibratórias e outros campos físicos de interesse na estrutura que são representadas por modelos matemáticos.

Diversas técnicas numéricas de resoluções de equações ou de sistemas de equações diferenciais deram origem a eficientes ferramentas de cálculo. Essas permitem a análise dos mais variados problemas de engenharia, contribuindo para a solução de problemas práticos para os quais as soluções analíticas são de difícil obtenção ou de difícil aplicação ou simplesmente não existem. Assim, os procedimentos numéricos possibilitam não apenas uma grande flexibilidade de modelagem, como também agilidade na obtenção da solução.

Neste trabalho são descritas as análises estática e dinâmica de arcos abatidos (quando submetidas a carregamentos móveis) segundo as teorias de Timoshenko e Euler-Bernoulli e utilizando o método dos elementos finitos (MEF). Neste caso, são deduzidas as formas exatas da matriz de rigidez e do vetor de carga para viabilizar a análise estática do arco. Além disso, são derivadas as matrizes de massa consistentes visando a determinação das frequências naturais da estrutura curva. Finalmente, o algoritmo do elemento finito proposto é adaptado para viabilizar a análise da carga móvel no arco abatido. Os resultados de flexão, da análise vibratória e da carga e massa móvel são comparados com respostas analíticas quando disponíveis. Além disso, quando um grande raio é setado, as respostas de vigas são recuperadas. Um código foi desenvolvido para obtenção das soluções numéricas.

**Palavras chaves:** Arcos Abatidos, MEF, Cargas Móveis, Massas Móveis

## ABSTRACT

With the development of calculation procedures and construction techniques, the structures reached increasingly daring dimensions, requiring more detailed studies by the technical community on the stability of these constructions. The structural design basically consists of three stages: structural analysis, dimensioning and detailing of structural elements. In the phase of structural analysis is that the actions on the structure are determined and the effects of these are determined in terms of stresses, displacements and deformations, vibratory characteristics and other physical fields of interest in the structure that are represented by mathematical models.

Several numerical techniques of resolution of equations or systems of differential equations gave rise to efficient calculation tools. These numerical techniques allow the analysis of the most varied engineering problems, contributing to the solution of practical problems for which analytical solutions are difficult to obtain or difficult to apply or simply do not exist. Thus, the numerical procedures allow not only a great flexibility of modeling, but also agility in obtaining solutions.

In this work the static and dynamic analyzes of arches (when submitted to mobile loads) according to the theories of Timoshenko and Euler-Bernoulli and using the finite element method (FEM) are described. In this case, the exact forms of the stiffness matrix and the load vector are deduced to enable the static analysis of the arc. In addition, consistent mass matrices are derived to determine the natural frequencies of the curved structure. Finally, the algorithm of the proposed finite element is adapted to make feasible the analysis of the moving load on the shallow arc. The results of bending, vibration analysis of moving masses and loads are compared with analytical responses when available. In addition, when a large beam is set, the beam responses are retrieved. A code is developed to obtain numerical solutions.

**Key Words:** Shallow Arches, FEM, Moving Loads, Moving Masses

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1: Exemplo de Carga Móvel em Estruturas: Monotrilho

Figura 2 – Cinemática da seção transversal em Timoshenko e Euler-Bernoulli

Figura 3 – Graus de Liberdade do elemento de Timoshenko e Euler-Bernoulli

Figura 4 – Graus de Liberdade do elemento de arco de Timoshenko e Euler-Bernoulli

Figura 5 – Vetor nodal de Carga Móvel para viga dividida em dois elementos.



## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Deflexões para Arcos Abatidos

Tabela 2 - Frequências Naturais para Arcos Abatidos

Tabela 3 - Deslocamento Transversal em  $L/2$  com 500 Passos e 10 elementos para Carregamento Móvel

Tabela 4 - Deslocamento Transversal em  $L/2$  com 200 Passos e 10 elementos para Carregamento Móvel

Tabela 5 – Deslocamento Transversal em  $L/2$  com 200 Passos e 20 elementos para Carregamento Móvel

Tabela 6 - Deslocamento Transversal em  $L/2$  com 500 Passos e 10 elementos Para Massa Móvel

Tabela 7 - Deslocamento Transversal em  $L/2$  com 200 Passos e 10 elementos para Massa Móvel

## LISTA DE SÍMBOLOS

|                    |   |
|--------------------|---|
| $\pi$              | Funcional de Energia                              |
| $\pi p$            | Energia potencial de deformação                   |
| $\pi c$            | Energia potencial de deformação                   |
| $\sigma_{xx}$      | Tensão axial em um elemento                       |
| $\varepsilon_{xx}$ | Deformação Axial                                  |
| $\tau_{xy}$        | Tensão de Cisalhamento                            |
| $E$                | Módulo de elasticidade longitudinal               |
| $G$                | Módulo de elasticidade transversal                |
| $A$                | Área transversal                                  |
| $I_z$              | Momento de inércia em z                           |
| $[K_g]$            | Matriz de rigidez global                          |
| $L$                | Comprimento da Barra                              |
| $\rho$             | Densidade   |
| $m$                | Massa da Estrutura ou Objeto                      |
| $[m]$              | Matriz de Massa consistente em coordenadas locais |
| $u$                | Deslocamento segundo eixo x                       |
| $\omega$           | Deslocamento segundo eixo y                       |
| $v$                | Deslocamento segundo eixo z                       |
| $\delta$           | Função Delta de Dirac                             |
| $\varphi$          | Rotação na seção transversal                      |
| $R$                | Raio de Curvatura do Arco                         |
| $\delta$           | Variacional                                       |
| $E_{xx}$           | Módulo de Elasticidade Longitudinal               |
| $G_{xz}$           | Módulo de Elasticidade Longitudinal               |
| $T$                | matriz global genérica                            |
| $\{F\}$            | vetor de carga                                    |

# SUMÁRIO

|  |                               |
|--|-------------------------------|
| 1. Introdução.....   | Erro! Indicador não definido. |
| 2. Objetivos.....  | Erro! Indicador não definido. |
| 3. Fundamentação Teórica .....   | Erro! Indicador não definido. |
| 3.1. Equações de Movimento .....   | Erro! Indicador não definido. |
| 3.2. Equações de Movimento de Vigas em Euler-Bernoulli e Timoshenko ...      | Erro! Indicador não definido. |
| 3.3. Equações de Movimento de Arcos em Euler-Bernoulli e Timoshenko...       | Erro! Indicador não definido. |
| 4. Metodologia.....  | Erro! Indicador não definido. |
| 4.1. Método dos Elementos Finitos.....                                       | Erro! Indicador não definido. |
| 4.2. Matrizes Locais de Rigidez e Massa da Viga de Timoshenko ..             | Erro! Indicador não definido. |
| 4.3. Matriz Local de Rigidez de Timoshenko para Arcos Abatidos               | Erro! Indicador não definido. |
| 4.4. Matrizes locais de Massa do Arco em Timoshenko e Euler-Bernoulli ...    | Erro! Indicador não definido. |
| 4.5. Influência da Massa do Objeto na Estrutura.....                         | Erro! Indicador não definido. |
| 4.6. Sistema Algébrico da Estrutura .....                                    | Erro! Indicador não definido. |
| 5. Resultados .....  | Erro! Indicador não definido. |
| 5.1. Carregamento Estático .....   | Erro! Indicador não definido. |
| 5.2. Frequências Naturais .....  | Erro! Indicador não definido. |
| 5.3. Carregamento Móvel.....   | Erro! Indicador não definido. |
| 5.4. Massa Móvel .....   | Erro! Indicador não definido. |
| 6. Conclusões.....   | Erro! Indicador não definido. |
| 7. Referências .....   | Erro! Indicador não definido. |
| Anexo A (frequência natural analítica em Timoshenko e Euler-Bernoulli) ..... | Erro! Indicador não definido. |
| Anexo B (Fluxograma para análise da Ação de Cargas e Massas Móveis).....     | Erro! Indicador não definido. |

## 1. Introdução

Um tipo particular de problemas de grande interesse para os engenheiros estruturais envolve a determinação da resposta dinâmica de barras causadas pela passagem de cargas móveis por toda sua extensão. Um dos exemplos práticos mais importantes deste tipo de problema é representado pela vibração das estruturas de pontes, vide Fig. 1

**Figura 1** – Exemplo de Carga Móvel em Estruturas: Monotrilho



Fonte: [https://pt.wikipedia.org/wiki/Linha\\_15\\_do\\_Metr%C3%B4\\_de\\_S%C3%A3o\\_Paulo](https://pt.wikipedia.org/wiki/Linha_15_do_Metr%C3%B4_de_S%C3%A3o_Paulo), data de acesso: 27/11/2017

O Método dos Elementos Finitos (MEF), é utilizado correntemente para a resolução de problemas da mecânica do contínuo, podendo viabilizar, sob certas condições, uma boa aproximação para solução de problemas de engenharia. O emprego do MEF não é restrito apenas a problemas estruturais sendo utilizado, também, na solução de problemas de transferência de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, etc.

Diversos trabalhos já foram publicados utilizando-se métodos analíticos e numéricos (principalmente o MEF) na análise dinâmica de barras e estruturas para problemas em que a fonte de excitação é fixa, notadamente, os livros de Petyt (1990), Humar (2012), Chopra (2012), Clough & Penzien (1993) e Paz (1997). Quando a fonte é móvel, o número de trabalhos é

sensivelmente menor mesmo sabendo que dependendo do tipo da excitação dinâmica, uma solução específica é geralmente requerida para o problema. Segundo Fryba (1972), os problemas de vigas submetidas a cargas móveis têm sido analisados basicamente utilizando três tipos de modelos simplificados: Força Móvel, Massa Móvel e Sprung. No caso do modelo de força móvel a massa do veículo é muito menor que a massa da estrutura que ele percorre. Já no modelo de massa móvel o veículo contribui de forma considerável na massa total do sistema veículo-estrutura.

Finalmente, o modelo Sprung é usado quando o veículo está ligado à estrutura por meio de vínculos elásticos e dispositivos de amortecimento Wang et al.(2000), Ouyang (2011). Esses problemas têm sido analisados numericamente na grande maioria dos casos por elementos finitos Sethi (2012), Wang (1997) concentrando-se em idealizações que admitem a conservação da planicidade da seção transversal, tais como o modelo de Euler-Bernoulli (onde o efeito da deformação por cisalhamento pode ser desprezada) e modelo de Timoshenko onde a deformação por cortante é levada em consideração.

As soluções numéricas por elementos finitos em estruturas sob excitação móvel têm sido concentradas em problemas de vigas (Sethi, (2012), Cifuentes (1989), Wu (2000), Zhu (2001), Abu (2000)). No entanto, o estudo de arcos sob cargas móveis recebeu bem menos contribuições. Wu & Chiang (2004), Reis & Pala (2009) e Yang et al.(2008) apresentaram soluções em elementos finitos para arcos usando o modelo de Euler-Bernoulli, e Javid et al.(2011) analisaram arcos circulares (profundos) sob as hipóteses de Timoshenko.

São deduzidas neste trabalho as matrizes exatas de rigidez e vetores de cargas para arcos abatidos em Euler-Bernoulli e Timoshenko. Além disso, foram obtidas as matrizes de massa consistentes permitindo análises modais. Finalmente foi desenvolvido o procedimento de análise do efeito carga móvel em arcos abatidos para ambos modelos de flexão. As análises de

vibrações transversais de vigas a serem abordados e comparados com os modelos de arcos são também baseados nas teorias de vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko

O presente projeto, por ter como foco o estudo de fenômenos físicos e a facilitação da inserção de rotinas computacionais sobre os resultados obtidos, faz uso de software de cálculo de engenharia que possibilita uma forma menos onerosa para o analista de estrutura. O trabalho foi desenvolvido através de códigos desenvolvidos no Lamfic (Laboratório de Modelos Físicos quantitativos e Computacionais).

## 2. Objetivos

Estudo dos campos de deslocamentos e esforços em arcos abatidos causados por forças estáticas, dinâmicas e massas móveis utilizando-se o MEF.

### **Objetivos específicos**

- a) Análises estáticas em arcos abatidos utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli;
- b) Estudo das frequências naturais em arcos abatidos utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli;
- c) Análise de cargas móveis em arcos abatidos utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli;
- d) Análise de massas móveis em arcos abatidos utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli;

### 3. Fundamentação Teórica

#### 3.1. Equações de Movimento

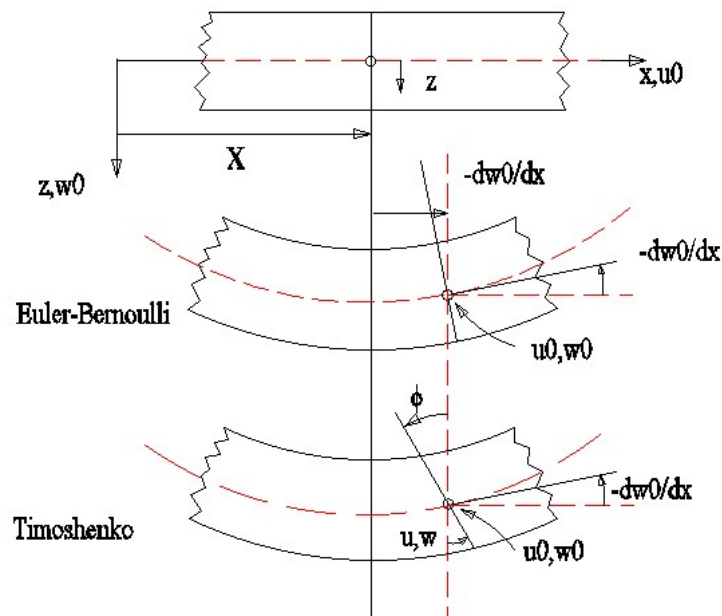
Neste trabalho são abordadas teorias de vigas e arcos associadas aos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko. As hipóteses compartilhadas pelas teorias são :

- Material homogêneo: qualquer região do corpo representa as propriedades e fenômenos do todo;
- Seções transversais uniformes (barra prismática): A barra é prismática quando não existe variação de forma das seções ao longo do eixo da barra;
- Material Isótropo: implica em mesmas propriedades em todas as direções,
- Material elasto-linear: implica que em um ciclo de carga-descarga, não há surgimento de deformações residuais; esse material é linear, quando a relação tensão-deformação for linear;
- Conservação da planicidade original das seções transversais durante o processo de deformação;
- Campos pequenos (suaves) de deslocamentos e deformações

Uma hipótese essencial que difere uma teoria da outra está associada à cinemática e configuração da seção transversal na posição deformada da estrutura, conforme indicada na Fig.2.



**Figura 2** – Cinemática da seção transversal em Euler-Bernoulli e Timoshenko.



### 3.2. Equações de Movimento de Vigas em Euler-Bernoulli e Timoshenko

A teoria de Euler-Bernoulli, mais simples e antecessora à de Timoshenko, é baseada na hipótese de que a seção transversal ortogonal à linha neutra antes da deformação continua ortogonal após a deformação, como mostrado na Fig.2. Tal idealização implica na desconsideração das distorções transversais. Assim, os deslocamentos são dados por:

$$u = -z \frac{d\omega}{dx} \quad (1.a)$$

$$\omega = \omega_0(x) \quad (1.b)$$

$$v = 0 \quad (1.c)$$

As deformações axiais e distorções no plano xy podem ser obtidas a partir dos deslocamentos, viabilizando o cálculo das tensões utilizando a lei de Hooke. Finalmente, os esforços são obtidos pela integração apropriada das tensões ao longo da seção transversal. Assim, fazendo-se o equilíbrio do sistema de força que atua em um elemento infinitesimal da viga, obtém-se a equação de equilíbrio da viga de Euler-Bernoulli dada por:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( E * I_z \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right) = q \quad (2)$$

No caso do problema dinâmico não-amortecido no modelo de carga móvel, a equação de movimento de Euler-Bernoulli fica como em Fryba (1972):

$$E * I_z \frac{d^4 \omega(x, t)}{dx^4} + I_A \frac{d^2 \omega(x, t)}{dt^2} = f(x, t) \quad (3)$$

Onde  $f(x, t) = \delta(x - ct)P$  para o caso do modelo de carga móvel e  $f(x, t) = [m_p * g - m_p * \frac{d^2 \omega^*(x_p, t)}{dt^2}] \delta(x - x_p)$  para o caso de massa móvel, sendo  $c$  a velocidade da carga móvel.

Sendo  $m_p$  a massa do veículo e  $g$  a aceleração da gravidade.  $A_{xx} = \int_A E * dA$  e  $I_A = \int_A \rho dA$  onde  $\rho$  é a massa específica.  $P$  é a intensidade da carga concentrada movendo-se com velocidade constante  $c$  sobre a viga .

Para o caso do modelo de Massa Móvel não amortecido, a equação de movimento da viga de Euler-Bernoulli fica:

A próxima teoria na hierarquia das vigas é a teoria de Timoshenko, que é baseada na cinemática da seção transversal mostrada na Fig.2. Convém notar que a seção transversal conserva sua planicidade, no entanto a conservação da ortogonalidade da mesma com o eixo longitudinal não é mais requerida. Tal idealização permite que a distorção transversa seja incorporada no modelo de Timoshenko. Assim, os deslocamentos axial e transversal são dados por:

$$u = -z\varphi(x) \quad (4)$$

$$\omega = \omega_0(x) \quad (5)$$

$$v = 0 \quad (6)$$

Onde  $\varphi$  representa a rotação da seção transversal em torno da linha neutra

Na teoria de Timoshenko é normalmente assumido um estado constante de deformação por cisalhamento transversal, necessitando de um fator de correção para compensar o erro devido a esta suposição. Após a obtenção, das deformações, tensões e esforços, equações de equilíbrio podem ser escritas como em Wang et al.(2000):

$$-\frac{d}{dx} \left( E * I_z \frac{d\varphi}{dx} \right) + k_s GA \left( -\varphi + \frac{d\omega}{dx} \right) = 0 \quad (7)$$

$$-\frac{d}{dx} \left[ k_z GA \left( \varphi + \frac{d\omega}{dx} \right) \right] = q \quad (8)$$

Onde  $k_z$  é o fator de correção que foi introduzido para compensar o erro causado por assumir o estado constante de cisalhamento transversal..

No caso da viga de Timoshenko submetida à cargas/massas móveis, as equações que regem são dadas por (7) e (8), requerendo apenas a substituição de  $q$  por  $f(x, t)$ . Análogo ao caso de Euler-Bernoulli,  $f(x, t) = \delta(x - ct) * P$  para o caso do modelo de carga móvel e  $f(x, t) = [m_p * g - m_p * \frac{d^2\omega^*(x_p, t)}{dt^2}] \delta(x - ct)$  para o caso de massa móvel.

### 3.3. Equações de Movimento de Arcos em Euler-Bernoulli e Timoshenko

Em Kdheir e Reddy (1995), são apresentadas as equações de movimento para três teorias de arcos abatidos, que incluem as de Euler-Bernoulli e Timoshenko. Então parte-se primeiro para a definição dos deslocamentos:

$$U(x, z, t) = \left( 1 + \frac{z}{R} \right) * u(x, t) + z * \left[ \delta_0 * \frac{\partial \omega}{\partial x} + \delta_1 * \phi(x, t) \right] + z^2 * \delta_2 \psi(x, t) + z^3 * \left[ \phi(x, t) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right] \quad (9)$$

$$V(x, z, t) = 0 \quad (10)$$

$$W(x, z, t) = \omega(x, t) \quad (11)$$

Onde U, V e W são deslocamentos gerados sobre as coordenadas x, y e z respectivamente.

Já as relações deformação-deslocamento são dadas por :

$$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} + z^2 * \varepsilon^{(2)} + z^3 * \varepsilon^{(3)} \quad (12)$$

$$\gamma = \gamma^{(0)} + z * \gamma^{(1)} + z^2 \gamma^{(2)} \quad (13)$$

Onde

$$\varepsilon^{(0)} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\omega}{R}, \quad \varepsilon^{(1)} = \delta_0 \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x} + \delta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\varepsilon^{(2)} = \delta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varepsilon^{(3)} = \delta_3 * \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 x} \right)$$

$$\gamma^{(0)} = (1 + \delta_0) * \frac{\partial \omega}{\partial x} + \delta_1 * \phi, \quad \gamma^{(1)} = 2 * \delta_2 \psi, \quad \gamma^{(2)} = 3 * \delta_3 * \left( \phi + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)$$

Ainda, introduzindo as seguintes resultantes de tensões (esforços):

$$(N, M, L, P) = \int_A \sigma_{xx} * (1, z, z^2, z^3) * dA, \quad (14)$$

$$Q = \int_A \tau_{xy} * (1, z, z^2) * dA \quad (15)$$

As equações de Euler-Lagrange (equações de movimento) do arco abatido ficam:

$$\frac{\partial y}{\partial x} N = \bar{I}_1 * \ddot{u} + \bar{I}_2 * \ddot{\phi} + \bar{I}_3 * \ddot{\psi} + \bar{I}_4 * \frac{\partial \ddot{\omega}}{\partial x} \quad (16)$$

$$\delta_1 \frac{\partial M}{\partial x} + \delta_3 \frac{\partial P}{\partial x} - \delta_1 * Q - 3 * \delta_3 * S = \bar{I}_2 * \ddot{u} + \bar{I}_5 * \ddot{\phi} + \bar{I}_6 * \ddot{\psi} + \bar{I}_7 * \frac{\partial \ddot{\omega}}{\partial x} \quad (17)$$

$$\delta_2 \frac{\partial L}{\partial x} - 2 * \delta_2 * T = \bar{I}_3 * \ddot{u} + \bar{I}_6 * \ddot{\phi} + \delta_2^2 * \bar{I}_5 * \ddot{\psi} + \bar{I}_8 * \frac{\partial \ddot{\omega}}{\partial x} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
(1 + \delta_0) \frac{\partial Q}{\partial x} + 3 * \delta_3 * \frac{\partial S}{\partial x} - \delta_0 * \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \delta_3 * \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{N}{R} + f & \quad (19) \\
= I_1 * \dot{w} - \bar{I}_4 * \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} - \bar{I}_7 * \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial x} - \bar{I}_9 * \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Já as Inércias nas Eqs. 16-19 são definidas como:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= I_1 + 2 * \frac{I_2}{R} \\
\bar{I}_2 &= \delta_1 * \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) + \delta_3 * \left( I_4 + \frac{I_5}{R} \right) \\
\bar{I}_3 &= \delta_2 * \left( I_3 + \frac{I_4}{R} \right) \\
\bar{I}_4 &= \delta_0 * \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) + \delta_3 * \left( I_4 + \frac{I_5}{R} \right) \\
\bar{I}_5 &= \delta_1^2 * \frac{I_3}{R} + 2 * \delta_1 * \delta_3 I_5 + \delta_3^2 * I_7 \\
\bar{I}_6 &= \delta_1 \delta_2 I_4 + \delta_2 \delta_3 I_6 \\
\bar{I}_7 &= \delta_0 \delta_1 I_3 + \delta_0 \delta_3 I_5 + \delta_1 \delta_3 I_5 + \delta_3^2 I_7 \\
\bar{I}_8 &= \delta_0 \delta_2 I_4 + \delta_2 \delta_3 I_6 \\
\bar{I}_9 &= \delta_0^3 I_3 + 2 * \delta_0 \delta_3 I_5 + \delta_3^2 I_7 \\
I_i &= b * \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho * z^{i-1} dz \quad i = (1, 2, \dots, 7) \quad (20)
\end{aligned}$$

Os deslocamentos podem ser relacionados aos esforços da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$Q = A_{55} \gamma^{(0)}$$

Onde

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = b \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} E * (1, z, z^2) dz \quad (21)$$

$$(A_{55}, B_{55}, D_{55}) = b \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} Kz * Gxy * (1, z, z^2) dz \quad (22)$$

Para o caso do modelo de Timoshenko, as constantes  $\delta_0 = \delta_2 = \delta_3 = 0, \delta_1 = 1$  devem ser setadas nas Eqs. 16-19, resultando em:

$$\frac{dN}{dx} = \left(I_1 + 2 * \frac{I_2}{R}\right) * \ddot{u} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R}\right) * \ddot{\phi} - fx \quad (23)$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{N}{R} = -fz \quad (24)$$

$$\frac{dM}{dx} - Q = \left(I_2 + \frac{I_3}{R}\right) * \ddot{u} + I_3 * \ddot{\phi} - m \quad (25)$$

Além disso, os esforços no arco de Timoshenko, são dados por:

$$N = E * A * \left(\frac{du}{dx} + \frac{\omega}{R}\right) \quad (26)$$

$$M = E * I * \frac{d\phi}{dx} \quad (27)$$

$$Q = K_z * G * A * \left(\phi + \frac{d\omega}{dx}\right) \quad (28)$$

Onde  $K_z$  é o fator de forma da seção transversal. No caso de seção retangular,  $K_z = 5/6$ .

Substituindo Eqs. 26, 27 e 28 em Eqs. 23, 24 e 25 tem-se as equações de movimento para o arco de Timoshenko:

$$Axx * \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\omega}{dx}\right) = 2 * \frac{\rho * A}{R} + \rho * I * \ddot{\phi} - fx \quad (30)$$

$$Kz * Axz * \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{d^2\omega}{dx^2}\right) - Axx * \frac{du}{dx} + \frac{\omega}{R} + fz = \rho * A * \ddot{u} \quad (31)$$

$$Dxx * \frac{d^2\phi}{dx^2} - Kz * Axz * \left(\phi + \frac{d\omega}{dx}\right) = \frac{\rho * I}{R} * \ddot{u} + \rho * I * \ddot{\phi} - m \quad (32)$$

Analogamente, o modelo de Euler-Bernoulli pode ser recuperado utilizando as Eqs. 16-19, setando as constantes  $\delta_0 = -1, \delta_2 = \delta_3 = \delta_1 = 0$ , resultando em:

$$Axx \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\omega}{R} + fx = \ddot{u} * A \quad (33)$$

$$-Dxx \frac{d^4 \omega}{dx^4} - \frac{\left( Axx * \frac{du}{dx} + \frac{\omega}{R} \right)}{R} + fz = \ddot{\omega} * A \quad (34)$$

Onde:

$$Axx = E * A$$

$$Axz = G * A$$

$$Dxx = E * I_z$$

Admitindo-se apenas atuação de uma carga concentrada vertical móvel na estrutura, as forças externas  $fz$  e  $fx$  nas Eqs 32 e 34 deverão ser substituídas por forças concentradas dadas por:

$$fz = F * \delta(x - ct) * \cos(\theta) \quad (35)$$

$$fx = F * \delta(x - ct) * \text{sen}(\theta) \quad (36)$$

Onde  $F$  é a carga concentrada vertical e  $\theta$  é a razão entre a posição da carga e o raio do arco.

## 4. Metodologia

### 4.1. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de cálculo estabelecida através da discretização do meio contínuo, de maneira que o sólido é subdividido (discretizado) em um número finito de partes, denominados de “Elementos”, conectados entre si por intermédio de pontos discretos, chamados de “Nós”.

Nota-se que a escolha adequada do tipo e tamanho dos “Elementos” depende das propriedades do problema em questão, e tem papel preponderante na análise. A discretização do problema pode gerar um grande número de graus de liberdade, de forma que as equações de equilíbrio/movimento no contínuo devem ser substituídas por um sistema algébrico matricial:

$$[M]\{\ddot{X}_t\} + [C]\{\dot{X}_t\} + [K]\{X_t\} = \{f(t)\} \quad (37)$$

Onde:

$[M]$  é a Matriz de massa,  $\{\ddot{X}_t\}$  é o Vetor Aceleração,  $[C]$  é a Matriz de Amortecimento;  $\{\dot{X}_t\}$  é o Vetor Velocidade,  $[K]$  é a Matriz de Rigidez,  $\{X_t\}$  é o Vetor Deslocamento;  $\{f(t)\}$  é o Vetor Força.

Quando a carga não varia com o tempo, o efeito é considerado estático, de forma que a Eq. 37 passa a ser escrita como:

$$[K]\{X\} = \{f\}$$

Assim, as matrizes de rigidez, amortecimento e de massa são essenciais para fazer a análise dinâmica pelo MEF.

Para o presente trabalho, foi considerado um sistema não amortecido.

### 4.2. Matrizes Locais de Rigidez e Massa da Viga de Timoshenko

A matriz local de rigidez da barra para a teoria de Timoshenko segundo os trabalhos de Queiroz (2010) e Petyt (1990):



$$[Kt] = \frac{E * I_z}{L(1 + 3\gamma t)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 + 3\gamma t & -\frac{6}{L} & 2 - 3\gamma t \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 - 3\gamma t & -\frac{6}{L} & 4 + 3\gamma t \end{bmatrix} \quad (38)$$

Onde,

$$\gamma t = \frac{E * I_z}{k_s D_{xz} a^2} \quad ; \quad a = \frac{L}{2}$$

A matriz de massa de viga de Timoshenko segundo os trabalhos de Queiroz(2010) e Petyt(1990):

$$[Mt] = \frac{I_A L}{840(1 + 3\gamma t)^2} \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ a2 & a5 & -a4 & a6 \\ a3 & -a4 & a1 & -a2 \\ a4 & a6 & -a2 & a5 \end{bmatrix} + \frac{I_D}{30L(1 + 3\gamma t)^2} \begin{bmatrix} a7 & a8 & -a7 & a8 \\ a8 & a9 & -a8 & a10 \\ -a7 & -a8 & a7 & -a8 \\ a8 & a10 & -a8 & a9 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Onde,

$$a1 = 312 + 1764\gamma t + 2520\gamma t^2$$

$$a2 = (44 + 231\gamma t + 315\gamma t^2)L$$

$$a3 = 108 + 705\gamma t + 1260\gamma t^2$$

$$a4 = -(26 + 189\gamma t + 315\gamma t^2)L$$

$$a5 = (8 + 42\gamma t + 21\gamma t^2)L^2$$

$$a6 = -3(2 + 14\gamma t + 21\gamma t^2)L^2$$

$$a7 = 36$$

$$a8 = -3(-1 + 15\gamma t)L$$

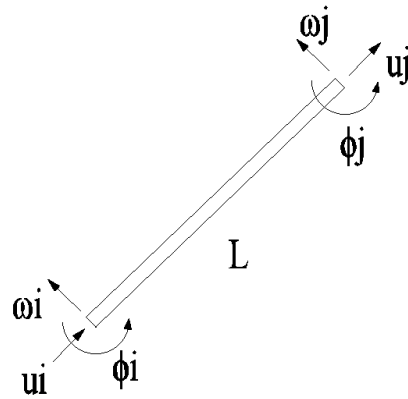
$$a9 = (4 + 15\gamma + 90\gamma t^2)$$

$$a10 = (-1 - 15\gamma + 45\gamma t^2)L^2$$

Para o modelo Euler-Bernoulli, tem-se que  $\gamma t = 0$ . Desta forma, a matriz proposta em (38) pode ser usada os dois casos: Euler-Bernoulli e Timoshenko. Essas matrizes

de rigidez e de massa estão associadas ao vetor de deslocamento  $\{u\}^T = [u_i \ \omega_i \ \varphi_i \ u_j \ \omega_j \ \varphi_j]$ , cujos graus de liberdade estão indicados na Figura 3:

**Figura 3** – Graus de Liberdade do elemento de viga de Timoshenko e Euler-Bernoulli



#### 4.3. Matriz Local de Rigidez de Timoshenko para Arcos Abatidos

Nesta seção é descrita a dedução da matriz de rigidez exata do modelo de Timoshenko para arcos abatidos.

Inicialmente, faz-se a determinação das funções interpoladoras. Em seguida, elas são substituídas no funcional de energia de deformação, que após a minimização do mesmo, encontra-se a matriz de rigidez. Assim, as Eqs. 30,31 e 32 podem ser escritas matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} Axx * \frac{d^2}{dx^2} & \frac{Axx}{R} * \frac{d}{dx} & 0 \\ -\frac{Axx}{R} * \frac{d}{dx} & -\frac{Axx}{R^2} + Kz * Axz * \frac{d^2}{dx^2} & Kz * Axz * \frac{d}{dx} \\ 0 & -Kz * Axz * \frac{d}{dx} & Dxx * \frac{d^2}{dx^2} - Kz * Axz \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u \\ \omega \\ \varphi \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} px \\ pz \\ m \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Simplificando o sistema, as soluções para os deslocamentos transversal  $\omega$ , longitudinal  $u$  e da rotação da seções transversal  $\varphi$  podem ser obtidas:

$$\varphi(x) = - \int \int \int \int \frac{\left( \frac{d^2}{dx^2} m + \left( \frac{d}{dx} pz + \frac{px}{R} \right) \right)}{Dxx} dx dx dx dx + C1 * \frac{x^3}{6} + C2 * \frac{x^2}{2} + C3 * x + C4 \quad (41)$$

$$w(x) = \int \int \int \int \int - \left( \frac{d^3}{dx^3} pz + \frac{d^2}{dx^2} x \right) + Kz * Axz * \left[ \frac{d^2}{dx^2} m + \frac{d^2}{dx^2} pz + \frac{px}{R} \right] dx dx dx dx dx + B1 * x^4 + B2 * x^3 + B3 * x^2 + B4 * x + B5 \quad (42)$$

$$u(x) = \int \int \int \int \int \int - \frac{\frac{d^4 y}{dx^4} px}{Axx} + \frac{\left( \frac{d^3}{dx^3} pz + \frac{d^2}{dx^2} px \right)}{KzAxz} - \frac{\left( \frac{d^2}{dx^2} m + \frac{d}{dx} pz + \frac{px}{R} \right)}{Dxx} dx dx dx dx dx dx + A1 * x^5 + A2 * x^4 + A3 * x^3 + A4 * x^2 + A5 * x + A6 \quad (43)$$

Substituindo as Eqs. 41,42 e 43 em 30, 31 e 32, pode-se descritizar os coefiencientes da seguinte forma:

$$\begin{aligned} B1 &= -A1 ; B2 = -A2; B3 = -A3 + A1 * \frac{Dxx}{Axz*Kz} ; B4 = -A4 + A2 * \frac{Dxx}{Axz*Kz} \\ C1 &= -\frac{B1}{R}; C2 = -\frac{B2}{R}; C3 = -\frac{B3}{R}; \\ C4 &= -\frac{B4}{R}; C5 = -\frac{B5}{R} + A1 * Dxx * \frac{R}{Axx}; \end{aligned} \quad (44)$$

O sistema 41-43 poderá ser escrito da seguinte forma:

$$u(x) = \frac{A1}{120 * R} * x^5 + \frac{A2}{24 * R} * x^4 + \frac{\left(A3 - A1 * \frac{Dxx}{Axz * Kz}\right)}{2 * R} * x^3 \quad (45)$$

$$+ \frac{\left(A4 - A2 * \frac{Dxx}{Axz * Kz}\right)}{2 * R} * x^2 + \left(A1 * Dxx * \frac{R}{Axx} - \frac{B5}{R}\right) * x + C6$$

$$w(x) = -\frac{A1}{24} * x^4 - \frac{A2}{6} * x^3 + \left(A1 * \frac{Dxx}{2 * Axz * Kz} - \frac{A3}{2}\right) * x^2 + \left(A2 * \frac{Dxx}{Axz * Kz} - A4\right) * x + B5 \quad (46)$$

$$\varphi(x) = A1 * \frac{x^3}{6} + A2 * \frac{x^2}{2} + A3 * x + A4 \quad (47)$$

Aplicando as condições de contorno para um elemento finito [ $u(0) = u_i, u(L) = u_j, \omega(0) = \omega_i, \omega(L) = \omega_j, \varphi(0) = \varphi_i, \varphi(L) = \varphi_j$ ], obtém-se um sistema algebrico formado por:

$$u_i = C6 \quad (48)$$

$$u_j = \frac{A1}{120 * R} * L^5 + \frac{A2}{24 * R} * L^4 + \frac{\left(A3 - A1 * \frac{Dxx}{Axz * Kz}\right)}{2 * R} * L^3 + \frac{\left(A4 - A2 * \frac{Dxx}{Axz * Kz}\right)}{2 * R} * L^2 + \left(A1 * Dxx * \frac{R}{Axx} - \frac{B5}{R}\right) * L + C6 \quad (49)$$

$$w_i = -B5 \quad (50)$$

$$w_j = -\frac{A1}{24} * L^4 - \frac{A2}{6} * L^3 + \left(A1 * \frac{Dxx}{2 * Axz * Kz} - \frac{A3}{2}\right) * L^2 + \left(A2 * \frac{Dxx}{Axz * Kz} - A4\right) * L + B5 \quad (51)$$

$$\varphi_i = A4 \quad (52)$$

$$\varphi_j = A1 * \frac{L^3}{6} + A2 * \frac{L^2}{2} + A3 * L + A4 \quad (53)$$

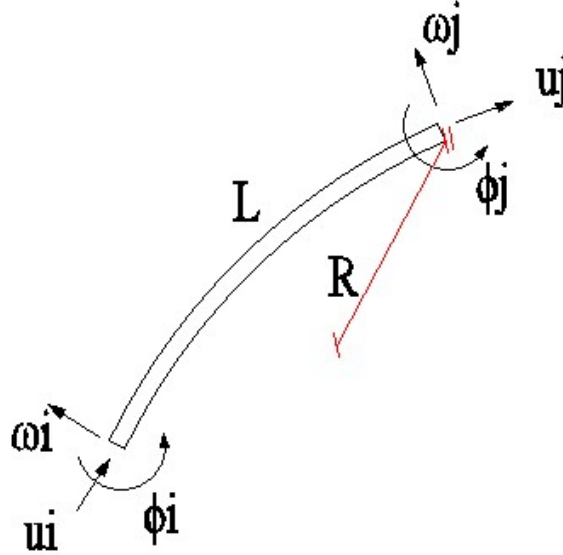
O sistema de equações 48-53 pode ser escrito matricialmente como:

$$[Q]\{\kappa\} = \{u\} \quad (54)$$

onde o vetor nodal dos deslocamentos  $\{u\}$  e a matriz de influencia  $[Q]$  são dados por:

$$\{u\}^T = [u_i \quad \omega_i \quad \phi_i \quad u_j \quad \omega_j \quad \phi_j] \quad (55)$$

**Figura 4** – Graus de Liberdade do elemento de arco de Timoshenko e Euler-Bernoulli



e

$$Q_{timo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{L^5}{120 * R} + \frac{Dxx * L * R}{Axx} - \frac{Dxx * L^3}{6 * Axz * Kz * R} * Timo & \frac{L^4}{24 * R} - \frac{Dxx * L^2}{2 * Axz * Kz * R} * Timo & \frac{L^3}{6 * R} & \frac{L^2}{2 * R} & -\frac{L}{R} & 1 \\ \frac{Dxx * L^2}{2 * Axz * Kz} * Timo - \left(\frac{L^4}{24}\right) & \frac{Dxx * L}{Axz * Kz} * Timo - \frac{L^3}{6} & -\frac{L^2}{2} & -L & 1 & 0 \\ \frac{L^3}{6} & \frac{L^2}{2} & L & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Sendo

$Timo = 1$  para o modelo de timoshenko e  $Timo = 0$  para o modelo euler-bernoulli

Invertendo-se a matriz em (56), o vetor das constantes é determinado como:

$$[\kappa] = [Q]^{-1}\{u\} \quad (57)$$

Substituindo-se (57) em (45-47), obtêm-se as funções interpoladoras dos deslocamentos

longitudinais  $[M]$ , transversais  $[N]$  e das rotações das seções  $[P]$ :

$$u(x) = [M(x)]\{u\} = \{u\}^T [M(x)]^T \quad (58)$$

$$\omega(x) = [N(x)]\{u\} = \{u\}^T [N(x)]^T \quad (59)$$

$$\varphi(x) = [P(x)]\{u\} = \{u\}^T [P(x)]^T \quad (60)$$

Onde

$$[M(x)] = [g_1(x)][Q]^{-1} \quad (61)$$

$$[N(x)] = [g_2(x)][Q]^{-1} \quad (62)$$

$$[P(x)] = [g_3(x)][Q]^{-1} \quad (63)$$

e

$$g_1 = \left( \frac{x^5}{120 * R} + \frac{D_{xx} * R * x}{Axx} - \frac{Dxx * x^3}{6 * Axz * Kz * R} * Timo \quad \frac{x^4}{24 * R} - \frac{Dxx * x^2}{2 * Axz * Kz * R} * Timo \quad \frac{x^3}{6 * R} \quad \frac{x^2}{2 * R} \quad -\frac{x}{R} \quad 1 \right)$$

$$g_2 = \left( -\frac{x^4}{24} \quad -\frac{x^3}{6} \quad -\frac{x^2}{2} \quad -x \quad 1 \quad 0 \right)$$

$$g_3 = \left( \frac{x^6}{6} \quad \frac{x^2}{2} \quad x \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right)$$

Além disso, as interpoladoras das primeiras e segundas derivadas dos deslocamentos transversais e a derivada das rotações podem ser escritas como:

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d[M(x)]}{dx} \{u\} = \{u\}^T \frac{d[M(x)]^T}{dx} \quad (64)$$

$$\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{d[N(x)]}{dx} \{u\} = \{u\}^T \frac{d[N(x)]^T}{dx} \quad (65)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d[P(x)]}{dx} \{u\} = \{u\}^T \frac{d[P(x)]^T}{dx} \quad (66)$$

A variação da energia de deformação do arco abatido de Timoshenko é dada por:

$$\delta\pi_p = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz}) dV \quad (67)$$

Inserindo as Eqs. 12 e 13 em 67, obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\pi_p = E \int_V \left( \frac{du}{dx} + \frac{\omega}{R} + z \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \right) * \left( \delta \left( \frac{du}{dx} \right) + \delta * \frac{\omega}{R} + \delta \left( z \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \right) \right) dV \\ + KG \int_V \left( \varphi + \frac{d\omega}{dx} \right) \left( \delta\varphi + \delta \frac{d\omega}{dx} \right) dV \end{aligned} \quad (68)$$

Substituindo-se 58, 59 e 60 no funcional da energia 68, fica:

$$\delta\pi_p = \{\delta u\}^T [K] \{u\} \quad (69)$$

Onde [K] é a matriz de rigidez que pode ser decomposta como:

$$[K] = [K_1] + [K_2] + [K_3] + [K_4] + [K_5] + [K_6] + [K_7] + [K_8] + [K_9] \quad (71)$$

Sendo

$$[K1] = A_{xx} [M'] * [L] * [M']^T$$

$$[K2] = A_{xx} [M'] * [L] * \frac{[N]^T}{R}$$

$$[K3] = A_{xx} * \frac{[N]}{R} * [L] * [M']^T$$

$$[K4] = A_{xx} * \frac{[N]}{R} * [L] * \frac{[N]^T}{R}$$

$$[K5] = Kz * Axz * [P] * [L] * [P]^T * Timo$$

$$[K6] = Kz * Axz * [P] * [L] * \frac{[N']^T}{R} * Timo$$

$$[K7] = Kz * Axz * \frac{[N]}{R} * [L] * [P]^T * Timo$$

$$[K8] = Kz * Axz * [N'] * [L] * [N']^T * Timo$$

$$[K9] = Dxx * [P'] * [L] * [P']^T$$

Onde [M'], [N'] e [P'] são as respectivas derivadas em x das matrizes [M], [N] e [P].

E a matriz [L] é dada por:

$$[L] = \int_L [g(x)]^T [g(x)] dx = \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{12}]^T & [L_{22}] \end{bmatrix}$$

Onde

$$[L_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{L^{11}}{11} & \frac{L^{10}}{10} & \frac{L^9}{9} \\ \frac{L^{10}}{10} & \frac{L^9}{9} & \frac{L^8}{8} \\ \frac{L^9}{9} & \frac{L^8}{8} & \frac{L^7}{7} \end{bmatrix}; [L_{12}] = [R_{21}] = \begin{bmatrix} \frac{L^8}{8} & \frac{L^7}{7} & \frac{L^6}{6} \\ \frac{L^7}{7} & \frac{L^6}{6} & \frac{L^5}{5} \\ \frac{L^6}{6} & \frac{L^5}{5} & \frac{L^4}{4} \end{bmatrix}; [L_{21}] = \begin{bmatrix} \frac{L^5}{5} & \frac{L^4}{4} & \frac{L^3}{3} \\ \frac{L^4}{4} & \frac{L^3}{3} & \frac{L^2}{2} \\ \frac{L^3}{3} & \frac{L^2}{2} & L \end{bmatrix}$$

#### 4.4. Matrizes locais de Massa do Arco em Timoshenko e Euler-Bernoulli

Nesta seção é apresentada a dedução da matriz local de massa consistente com as funções interpoladoras propostas neste trabalho para representar o deslocamento transversal e rotação da seção para arcos abatidos nos modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli.

As velocidades, axial e transversal, são dadas por:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \quad (72)$$

A parcela referente à energia cinética, aplicando variacional, é dada por:

$$\delta U_c = \rho \int_V (\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{\omega} \delta \dot{\omega}) dV \quad (73)$$

Substituindo as Eqs. 9 e 11 em 62, tem-se

$$\delta U_c = \rho * \int (\varphi * z^2 * \delta \varphi) dV + \rho * \int (\omega * \delta \omega) dV + \rho * \int (u \delta u) dV \quad (74)$$

Que ao ser integrada ao longo da seção transversal fica:

$$\delta U_c = \rho * I_D \int (\varphi * \delta \varphi) dx + \rho * A \int (\omega * \delta \omega) dx + \rho * A \int (u \delta u) dx \quad (75)$$

Substituindo-se o sistema de Eqs. 64-66 no funcional de energia cinética, Eq. 75, tem-se:

$$\delta \pi_p = \{\delta \dot{u}\}^T [M] \{\dot{u}\} \quad (76)$$



Onde

$$[M] = [M_1] + [M_2] * Timo + [M_3]$$

Sendo

$$[M_1] = \rho * I_D \int (\varphi * \delta\varphi) dx = I_D \{P\}^T [L] \{P\}$$

$$[M_1] = \rho * I_D \int (\varphi * \delta\varphi) dx = I_D \{P\}^T [L] \{P\}$$

$$[M_2] = \rho * A \int (\varphi * \delta\varphi) dx = A \{N\}^T [L] \{N\}$$

$$[M_3] = \rho * A \int (\varphi * \delta\varphi) dx = A \{M\}^T [L] \{M\}$$

As matrizes de rigidez e de massa estão associadas ao vetor de deslocamento  $\{u\}^T = [u_i \ \omega_i \ \varphi_i \ u_j \ \omega_j \ \varphi_j]$ .

Desta forma, tendendo-se o raio para um valor infinito, as matrizes de rigidez e massa replicam os resultados propostos por Queiroz (2010) e Petyt (1990)

#### 4.5. Influência da Massa do Objeto na Estrutura

A análise do Massa Móvel em arcos abatidos baseou-se na equação de movimento de da viga de Euler-Bernoulli quando submetida à ação de uma massa móvel acelerada segundo Esen e Mevkii (2011).

$$EI * \frac{\partial^4 \omega(x, t)}{\partial x^4} + \rho * \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} + 2 * \mu * \omega_b * \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} = f_z(x, t) \quad (77)$$

Onde  $\rho$  e  $\omega_b$  são respectivamente a densidade e frequência circular da viga, e:

$$f_z(x, t) = [m_p * g - m_p * \frac{d^2 \omega * (x_p, t)}{dt^2}] \delta(x - x_p) \quad (78)$$

$$x_p = x_0 + v_0 t \quad (80)$$

$$\frac{dx_p}{dt} = v_0 \quad (81)$$

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = a_m \quad (82)$$

Pode-se escrever a Eq. 78 como:

$$f_z(x, t) = -\{f1\} + \{f2\} \quad (83)$$

Onde

$$\{f1\} = [m] * \{\ddot{u}\} + [c] * \{\dot{u}\} + [k] * \{u\}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} N_1^2 & 0 & 0 & N_1 N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2^2 & N_2 N_3 & 0 & N_2 N_5 & N_2 N_6 \\ 0 & N_3 N_2 & N_3^2 & 0 & N_3 N_5 & N_3 N_6 \\ N_4 N_1 & 0 & 0 & N_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 N_2 & N_5 N_3 & 0 & N_5^2 & N_5 N_6 \\ 0 & N_6 N_2 & N_6 N_3 & 0 & N_6 N_5 & N_6^2 \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N_2' & N_2 N_3' & N_2 N_5' & N_2 N_6' \\ 0 & N_3 N_2' & N_3 N_3' & N_3 N_5' & N_3 N_6' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_5 N_2' & N_5 N_3' & N_5 N_5' & N_5 N_6' \\ 0 & N_6 N_2' & N_6 N_3' & N_6 N_5' & N_6 N_6' \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & k_{25} & k_{26} \\ 0 & k_{32} & k_{33} & k_{35} & k_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52} & k_{53} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & k_{62} & k_{63} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Onde  $k_{i,j} = v(t)^2 * N_i * N_j$ .  $\{f2\}$  será inserido no sistema algébrico como vetor de carga e  $\{f1\}$  como elemento de correção das matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez.

#### 4.6. Sistema Algébrico da Estrutura

A solução numérica é obtida a partir da discretização do problema definido no contínuo, em um número finito de elementos. As matrizes de rigidez e massa descritas nas seções anteriores são referentes a apenas um único elemento finito no sistema local de coordenadas. Para que a solução seja possível, as contribuições de todos os elementos devem ser convenientemente em matrizes globais associadas aos graus de liberdade de nós funcionais discretizados. O espalhamento de uma matriz local genérica  $[t]$  do  $k$ -ésimo elemento finito em uma matriz global genérica  $[T]$  da estrutura pode ser feita pelas expressões:

$$[T_{I_1, J_1}] = [T_{I_1, J_1}] + [t_{i, j}] \quad (84)$$

$$[T_{I_1, J_2}] = [T_{I_1, J_2}] + [t_{i, j+v}], \quad (85)$$

$$[T_{J_2, I_1}] = [T_{J_2, I_1}] + [t_{i+v, j}] \quad (86)$$

$$[T_{J_2, J_2}] = [T_{J_2, J_2}] + [t_{i+v, j+v}] \quad (87)$$

Com

$$I_1 = v\text{Noi} - v + i,$$

$$J_1 = v\text{Noi} - v + j,$$

$$I_2 = v\text{Noj} - v + i,$$

$$J_2 = v\text{Noj} - v + j$$

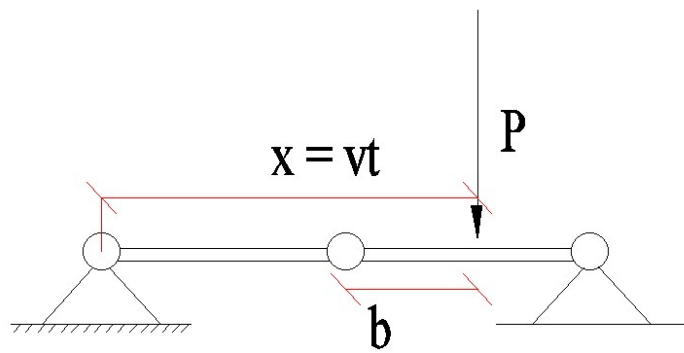
Onde  $v = 2$  e  $i, j = 1, 2$  para o modelo de Timoshenko e Euler. Noi e Noj representam os números globais (inicial e final) do  $k$ -ésimo elemento.

Já o vetor nodal equivalente do  $k$ -ésimo elemento  $\{f\}$  posicionado no vetor de força da estrutura  $\{F\}$  fica:

$$\{F_{I_1}\} = \{F_{I_1}\} + \{f_i\}, \{F_{J_2}\} = \{F_{J_2}\} + \{f_{i+v}\} \quad (88)$$

Como a carga está em movimento, para cada intervalo de tempo, a posição do vetor força muda seu posicionamento, resultando numa mudança na alteração do vetor de força da estrutura, vide Figura 4. Assim, a cada instante analisado o elemento finito que está sendo carregado deve ser identificado e sua posição em relação ao nó inicial desse elemento deve ser calculado; de posse desse, determina-se o vetor nodal equivalente local, e finalmente o vetor de força é recalculado para dar prosseguimento ao cálculo vetores dos deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura.

**Figura 5** – Vetor nodal de Carga Móvel para viga dividida em dois elementos.



A determinação dos campos em cada instante requer uma integração temporal do sistema de equações do problema discretizado. Neste trabalho utiliza-se o método Beta-Newmark discutido em Bathe (2014), assumindo-se que a aceleração é constante e igual a aceleração média do intervalo, de forma os parâmetros do método são  $\alpha = 0,5$   $\beta = 0,25$ .

O algoritmo é desenvolvido de maneira análoga ao trabalho de Pereira (2016), adaptado para o caso massa móvel, e descrito abaixo e, três etapas:

#### ETAPA I

1. Laço nos Elementos Finitos;
2. Montagem das Matrizes de Rigidez, Massa e Amortecimento da Estrutura a partir de suas matrizes elementais ( $K_g$ ,  $M_g$ ,  $C_g$ ).

## ETAPA II

1. Redução das Matrizes da Estrutura devido aos Graus de Liberdade;
2. Coeficientes do Algoritmo de Newmark;
3. Matriz de Rigidez Equivalente;

## ETAPA III

1. Início do Laço dos Passos no tempo;
2. Determinação da Coordenada da Carga Móvel;
3. Determinação do Elemento que contem a Carga Móvel no passo atual;
4. Determinação do Vetor de carga F no Elemento no Passo Atual segundo Eq. 35 e 36;
5. Espalhamento de F no Vetor de Carga da Estrutura;
7. Redução do Vetor de Carga da Estrutura devido aos Graus Prescritos;
8. Vetor de Carga Atualizado para o passo atual;
9. Calculo do Vetor de Deslocamento do passo atual;
10. Matrizes de Rigidez, Massa e Amortecimento atualizadas para o passo atual (caso massa móvel)
11. Diferença entre os vetores de deslocamento atual e o passado;
12. Calculo da velocidade no passo atual;
13. Calculo da aceleração no passo atual;
14. Atribuição dos vetores dos passos atuais como vetores do passado para o próximo passo de iteração.

As etapas acima são ilustradas no fluxograma em anexo (vide Anexo B).

## 5. Resultados

Com o propósito de introduzir futuramente o modelo de arco nas análises dinâmica sob fonte móvel, os modelos de Euler e Timoshenko foram implementados via o MEF neste trabalho. Para o caso de carregamento estático, foi analisado um arco bi apoiado. As respostas numéricas são comparadas com resultados analíticos de arcos.

### 5.1. Carregamento Estático

O arco foi analisado a discretização de um único elemento finito com comprimento de 6m, módulo de elasticidade longitudinal de 30 GPa, módulo de elasticidade transversal de  $E/2$  e relação largura/comprimento de 1/20 com carga concentrada vertical de  $10^5 N$  aplicada no meio vão. As soluções analíticas para os modelos de Euler e Timoshenko são dadas segundo Nascimento Júnior (2017). As deflexões para o caso biapoiado são dispostas na Tab.1.

**Tabela 1** - Deflexões para Arcos Abatidos Biapoiados

| Carregamento Pontual em $L/2$   |                   | $10^5 N$               |                   |                       |
|---------------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|-----------------------|
| $w (m)$ para $L/h = 10$         |                   |                        |                   |                       |
| R/L                             | <i>Euler</i>      | Analítico Euler        | Timo              | Analítico Timo        |
| 5                               | $2.778 * 10^{-3}$ | $2.778 * 10^{-3}$      | $2.844 * 10^{-3}$ | $2.844 * 10^{-3}$     |
| 10                              | $2.778 * 10^{-3}$ | $2.778 * 10^{-3}$      | $2.844 * 10^{-3}$ | $2.844 * 10^{-3}$     |
| Viga                            | $2.778 * 10^{-3}$ | $2.778 * 10^{-3}$      | $2.844 * 10^{-3}$ | $2.844 * 10^{-3}$     |
| <i>Carregamento distribuído</i> |                   | $10^3 N/m$             |                   |                       |
| R/L                             | <i>Euler</i>      | <i>Analítico Euler</i> | <i>Timo</i>       | <i>Analítico Timo</i> |
| 5                               | $1.042 * 10^{-4}$ | $1.042 * 10^{-4}$      | $1.062 * 10^{-4}$ | $1.062 * 10^{-4}$     |
| 10                              | $1.042 * 10^{-4}$ | $1.042 * 10^{-4}$      | $1.062 * 10^{-4}$ | $1.062 * 10^{-4}$     |
| Viga                            | $1.042 * 10^{-4}$ | $1.042 * 10^{-4}$      | $1.062 * 10^{-4}$ | $1.062 * 10^{-4}$     |
| $w (m)$ para $L/h = 5$          |                   |                        |                   |                       |
| Carregamento Pontual em $L/2$   |                   | $10^5 N$               |                   |                       |
| R/L                             | <i>Euler</i>      | <i>Analítico Euler</i> | <i>Timo</i>       | <i>Analítico Timo</i> |
| 5                               | $3.472 * 10^{-4}$ | $3.472 * 10^{-4}$      | $3.806 * 10^{-4}$ | $3.806 * 10^{-4}$     |
| 10                              | $3.472 * 10^{-4}$ | $3.472 * 10^{-4}$      | $3.806 * 10^{-4}$ | $3.806 * 10^{-4}$     |
| Viga                            | $3.472 * 10^{-4}$ | $3.472 * 10^{-4}$      | $3.806 * 10^{-4}$ | $3.806 * 10^{-4}$     |
| <i>Carregamento distribuído</i> |                   | $10^3 N/m$             |                   |                       |
| R/L                             | <i>Euler</i>      | <i>Analítico Euler</i> | <i>Timo</i>       | <i>Analítico Timo</i> |
| 5                               | $1.302 * 10^{-5}$ | $1.302 * 10^{-5}$      | $1.402 * 10^{-5}$ | $1.402 * 10^{-5}$     |
| 10                              | $1.302 * 10^{-5}$ | $1.302 * 10^{-5}$      | $1.402 * 10^{-5}$ | $1.402 * 10^{-5}$     |
| Viga                            | $1.302 * 10^{-5}$ | $1.302 * 10^{-5}$      | $1.402 * 10^{-5}$ | $1.402 * 10^{-5}$     |

Observa-se que os resultados em elementos finitos recuperam os valores analíticos.

## 5.2. Frequências Naturais

Para validação das frequências naturais obtidas para as teorias Euler-Bernoulli e Timoshenko, o modelo de arco bi-apoiado foi analisado.

Na Tab. 2, as 10 primeiras frequências  $\omega$  obtidas numericamente são comparadas com a solução analítica (Axeno A) para arcos com altura um quinto e um décimo do seu comprimento.

**Tabela 2a** - Frequências Naturais para Arcos Abatidos (Parte 1)

| $\omega$ (rad/s) com $L/h = 5$ |                |                |                |                |                |                |
|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                                | 1 Elemento     |                | 2 Elementos    |                | 3 Elementos    |                |
| Modo                           | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           |
| 1                              | 358.057        | 352.235        | 323.871        | 309.455        | 323.02         | 307.612        |
| 2                              | $1.641 * 10^3$ | $1.604 * 10^3$ | $1.432 * 10^3$ | $1.345 * 10^3$ | $1.306 * 10^3$ | $1.132 * 10^3$ |
| 3                              | –              | –              | $1.961 * 10^3$ | $1.961 * 10^3$ | $1.861 * 10^3$ | $1.861 * 10^3$ |
| 5                              | –              | –              | $6.563 * 10^3$ | $5.497 * 10^3$ | $4.16 * 10^3$  | $4.16 * 10^3$  |
| 10                             | –              | –              | –              | –              | –              | –              |

| $\omega$ (rad/s) com $L/h = 5$ |                |                |                |                |                |                |
|--------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                                | 4 Elementos    |                | 10 Elementos   |                | Analítico      |                |
| Modo                           | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           |
| 1                              | 322.843        | 307.045        | 322.761        | 306.518        | 321.924        | 305.644        |
| 2                              | $1.295 * 10^3$ | $1.109 * 10^3$ | $1.29 * 10^3$  | $1.087 * 10^3$ | $1.29 * 10^3$  | $1.083 * 10^3$ |
| 3                              | $1.825 * 10^3$ | $1.825 * 10^3$ | $1.786 * 10^3$ | $1.786 * 10^3$ | $1.782 * 10^3$ | $1.782 * 10^3$ |
| 5                              | $3.922 * 10^3$ | $3.922 * 10^3$ | $3.616 * 10^3$ | $3.348 * 10^3$ | $3.559 * 10^3$ | $3.559 * 10^3$ |
| 10                             | $2.157 * 10^4$ | $7.882 * 10^3$ | $9.806 * 10^3$ | $6.643 * 10^3$ | $8.897 * 10^3$ | $7.538 * 10^3$ |

**Tabela 2b** - Frequências Naturais para Arcos Abatidos (Parte 2)

| $\omega$ (rad/s) com $L/h = 10$ |            |         |                |                |                |                |
|---------------------------------|------------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Modo                            | 1 Elemento |         | 2 Elementos    |                | 3 Elementos    |                |
|                                 | Euler      | Timo    | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           |
| 1                               | 179.455    | 178.726 | 162.261        | 160.339        | 161.752        | 159.688        |
| 2                               | 820.399    | 815.988 | 716.093        | 704.443        | 652.811        | 626.252        |
| 3                               | –          | –       | $1.8 * 10^3$   | $1.734 * 10^3$ | $1.611 * 10^3$ | $1.554 * 10^3$ |
| 5                               | –          | –       | $3.282 * 10^3$ | $3.209 * 10^3$ | $4.16 * 10^3$  | $4.16 * 10^3$  |
| 10                              | –          | –       | –              | –              | –              | –              |

| $\omega$ (rad/s) com $L/h = 10$ |                |                |                |                |                |                |
|---------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Modo                            | 4 Elementos    |                | 10 Elementos   |                | Analítico      |                |
|                                 | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           | Euler          | Timo           |
| 1                               | 161.638        | 159.492        | 161.622        | 159.439        | 161.296        | 159.099        |
| 2                               | 646.254        | 616.165        | 645.254        | 613.275        | 645.193        | 612.524        |
| 3                               | $1.463 * 10^3$ | $1.337 * 10^3$ | $1.452 * 10^3$ | $1.31 * 10^3$  | $1.452 * 10^3$ | $1.303 * 10^3$ |
| 5                               | $2.64 * 10^3$  | $2.31 * 10^3$  | $2.585 * 10^3$ | $2.199 * 10^3$ | $2.581 * 10^3$ | $2.167 * 10^3$ |
| 10                              | $8.546 * 10^3$ | $7.695 * 10^3$ | $7.232 * 10^3$ | $5.45 * 10^3$  | $8.893 * 10^3$ | $8.893 * 10^3$ |

Convém notar que a consistência dos resultados para as frequências naturais está fortemente ligada a quantidade de elementos que descrevem o arco. Desta forma, quanto maior a frequência natural, maior o número de elementos necessários para a obtenção de um resultado preciso.

### 5.3. Carregamento Móvel

Os resultados para cargas móveis utilizando os modelos de Timoshenko e Euler-Bernoulli foram obtidos segundo as seguintes considerações: A viga possui seção transversal retangular comprimento de 6 metros, relação base/comprimento de 1/20 e altura/comprimento de 1/5. Seu módulo de elasticidade é de  $30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e massa específica de  $2600 \text{ kg/m}^3$ . A barra é discretizada em 10 elementos. O carregamento vertical é de  $10^5 \text{ N}$  e percorre o arco com velocidade 3m/s. Analizamos o deslocamento transversal utilizando processos iterativos de 200 e 500 passos. O termo passos, nesta seção, faz referência à razão entre o tempo total de passagem da carga e a variação no tempo, ou seja  $t/\Delta t$ . Os deslocamentos transversais em  $L/2$



são dispostas nas Tabs. 3a, 3b e 4. As soluções analíticas para o modelo de Carga Móvel em Euler e Timoshenko são dadas segundo Fryba (1972)

**Tabela 3a** - Deslocamento Transversal em L/2 com 500 Passos e 10 elementos para Carregamento Móvel em Euler

| <i>Discretização: 10 elementos, 500 Passos</i>           |         |          |          |                |
|--|---------|----------|----------|----------------|
| <i>w10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Euler</i> |         |          |          |                |
| t (s)  | R/L = 5 | R/L = 10 | R/L = 50 | Analítico Viga |
| 0,2  | 1.005   | 1.01     | 1.011    | 1.0112         |
| 0,4  | 1.956   | 1.948    | 1.945    | 1.9760         |
| 0,6  | 2.738   | 2.747    | 2.747    | 2.7657         |
| 0,8  | 3.244   | 3.243    | 3.246    | 3.2702         |
| 1  | 3.456   | 3.445    | 3.437    | 3.45844        |
| 1,2  | 3.252   | 3.274    | 3.282    | 3.2886         |
| 1,4  | 2.714   | 2.691    | 2.691    | 2.7614         |
| 1,6  | 1.966   | 1.975    | 1.963    | 1.9589         |
| 1,8  | 1.009   | 1.023    | 1.044    | 1.0194         |

**Tabela 3b** - Deslocamento Transversal em L/2 com 500 Passos e 10 elementos para Carregamento Móvel em Timoshenko

| <i>Discretização: 10 elementos, 500 Passos</i>                   |       |       |       |        |
|--|-------|-------|-------|--------|
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Timoshenko</i> |       |       |       |        |
| t (s)  |       |       |       |        |
| 0.2  | 1.004 | 1.009 | 1.01  | 1.0112 |
| 0.4  | 1.959 | 1.95  | 1.947 | 1.9760 |
| 0.6  | 2.735 | 2.744 | 2.745 | 2.7657 |
| 0.8  | 3.246 | 3.244 | 3.248 | 3.2702 |
| 1  | 3.455 | 3.445 | 3.437 | 3.4584 |
| 1.2  | 3.253 | 3.275 | 3.283 | 3.2886 |
| 1.4  | 2.712 | 2.689 | 2.688 | 2.7614 |
| 1.6  | 1.968 | 1.977 | 1.965 | 1.9589 |
| 1.8  | 1.008 | 1.022 | 1.043 | 1.0194 |

**Tabela 4** – Deslocamento Transversal em L/2 com 200 Passos e 10 elementos para Carregamento Móvel

| <i>Discretização: 10 elementos, 200 Passos</i>                   |         |          |          |                       |
|--|---------|----------|----------|-----------------------|
| <i>w * 10<sup>-4</sup>(m) utilizando o modelo de Euler</i>       |         |          |          |                       |
| t (s)  | R/L = 5 | R/L = 10 | R/L = 50 | <i>Analítico Viga</i> |
| 0,2  | 0.9652  | 0.9642   | 0.964    | 1,011294              |
| 0,4  | 1.934   | 1,936    | 1,937    | 1,976072              |
| 0,6  | 2.704   | 2,7      | 2,699    | 2,765777              |
| 0,8  | 3.238   | 3,244    | 3,246    | 3,270283              |
| 1  | 3.454   | 3,447    | 3,444    | 3,458443              |
| 1,2  | 3.251   | 3,259    | 3,262    | 3,288606              |
| 1,4  | 2.771   | 2,763    | 2,76     | 2,761416              |
| 1,6  | 1.96    | 1,966    | 1,97     | 1,958919              |
| 1,8  | 1.077   | 1,073    | 1,07     | 1,019482              |
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Timoshenko</i> |         |          |          |                       |
| 0.2  | 0.964   | 0.963    | 0.962    | 1.0112                |
| 0.4  | 1.936   | 1.938    | 1.939    | 1.976                 |
| 0.6  | 2.702   | 2.698    | 2.696    | 2.7657                |
| 0.8  | 3.24    | 3.245    | 3.247    | 3.2702                |
| 1  | 3.453   | 3.446    | 3.444    | 3.4584                |
| 1.2  | 3.252   | 3.259    | 3.262    | 3.2886                |
| 1.4  | 2.769   | 2.761    | 2.758    | 2.7614                |
| 1.6  | 1.962   | 1.968    | 1.972    | 1.95891               |
| 1.8  | 1.075   | 1.072    | 1.068    | 1.01948               |

Discretizando a barra em 20 elementos, com 200 passos no tempo, obtêm-se os deslocamentos transversais segundo a Tab. 5.

**Tabela 5** – Deslocamento Transversal em L/2 com 200 Passos e 20 elementos para Carregamento Móvel

| <i>Discretização: 20 elementos e 200 Passos</i>                  |                |                 |                 |                       |
|--|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| <i>w * 10<sup>-4</sup>(m) utilizando o modelo de Euler</i>       |                |                 |                 |                       |
| <i>t (s)</i>   | <i>R/L = 5</i> | <i>R/L = 10</i> | <i>R/L = 50</i> | <i>Analítico Viga</i> |
| 0,2  | 0.9659         | 0.9649          | 0.9647          | 1,011294              |
| 0,4  | 1.936          | 1.938           | 1.939           | 1,976072              |
| 0,6  | 2.714          | 2.71            | 2.709           | 2,765777              |
| 0,8  | 3.255          | 3.261           | 3.263           | 3,270283              |
| 1  | 3.48           | 3.473           | 3.471           | 3,458443              |
| 1,2  | 3.283          | 3.291           | 3.293           | 3,288606              |
| 1,4  | 2.798          | 2.792           | 2.789           | 2,761416              |
| 1,6  | 1.999          | 2.004           | 2.007           | 1,958919              |
| 1,8  | 1.093          | 1.092           | 1.089           | 1,019482              |
| 2  | 0.03858        | 0.03616         | 0.03829         | 0.01539               |
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Timoshenko</i> |                |                 |                 |                       |
| 0.2  | 0.9658         | 0.9648          | 0.9646          | 1.0112                |
| 0.4  | 1.936          | 1.938           | 1.939           | 1.976                 |
| 0.6  | 2.714          | 2.71            | 2.709           | 2.7657                |
| 0.8  | 3.255          | 3.261           | 3.263           | 3.2702                |
| 1  | 3.48           | 3.473           | 3.47            | 3.4584                |
| 1.2  | 3.283          | 3.291           | 3.294           | 3.2886                |
| 1.4  | 2.799          | 2.792           | 2.789           | 2.7614                |
| 1.6  | 1.999          | 2.004           | 2.007           | 1.95891               |
| 1.8  | 1.094          | 1.092           | 1.089           | 1.01948               |

Comparando os resultados dispostos nas Tabs. 3 e 5, observa-se que a discretização temporal é mais crítica na obtenção precisa dos deslocamentos. Os resultados da Tab. 3, onde o arco discretizado é em 10 elementos e 500 passos no tempo, se aproximam mais do resultado analíticos do que os resultados da Tab. 5, onde o arco é discretizado em 20 elementos e 200 passos no tempo.

## 5.4. Massa Móvel

Seja uma barra seção de retangular e com comprimento de 6 metros, relação base/comprimento de 1/20 e altura/comprimento de 1/10. Seu módulo de elasticidade é de  $30 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  e massa específica de  $2600 \text{ kg/m}^3$ . A viga é discretizada em 10 elementos. O carregamento vertical possui uma massa de  $1.02 \times 10^4 \text{ Kg}$  e percorre o arco com velocidade 3m/s. Analizamos o deslocamento transversal utilizando processos iterativos de 200 e 500 passos. As deslocamentos transversais em L/2 são dispostas nas Tabs. 6 e 7. Convém ressaltar que as soluções analíticas dispostas nas Tabs. 6 e 7 correspondem ao modelo de Carga Móvel.

**Tabela 6** – Deslocamento Transversal em L/2 com 500 Passos e 10 elementos Para Massa Movel

| <i>Discretização: 10 elementos 500 Passos</i>                    |                |                 |                 |                       |
|--|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Euler</i>      |                |                 |                 |                       |
| <i>t (s)</i>   | <i>R/L = 5</i> | <i>R/L = 10</i> | <i>R/L = 50</i> | <i>Analitico Viga</i> |
| 0.2  | 0.9989         | 1.007           | 1.013           | 1.0112                |
| 0.4  | 1.928          | 1.952           | 1.969           | 1.976                 |
| 0.6  | 2.628          | 2.677           | 2.713           | 2.7657                |
| 0.8  | 3.098          | 3.177           | 3.238           | 3.2702                |
| 1  | 3.263          | 3.359           | 3.441           | 3.45844               |
| 1.2  | 3.02           | 3.169           | 3.284           | 3.2886                |
| 1.4  | 2.43           | 2.612           | 2.752           | 2.7614                |
| 1.6  | 1.575          | 1.776           | 1.934           | 1.9589                |
| 1.8  | 0.6067         | 0.8242          | 0.9963          | 1.0194                |
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Timoshenko</i> |                |                 |                 |                       |
|  | <i>R/L = 5</i> | <i>R/L = 10</i> | <i>R/L = 50</i> | <i>Analitico Viga</i> |
| 0.2  | 1.045          | 1.049           | 1.052           | 1.0112                |
| 0.4  | 2.056          | 2.07            | 2.085           | 1.976                 |
| 0.6  | 2.827          | 2.881           | 2.921           | 2.7657                |
| 0.8  | 3.351          | 3.425           | 3.487           | 3.2702                |
| 1  | 3.6            | 3.723           | 3.817           | 3.4584                |
| 1.2  | 3.228          | 3.371           | 3.492           | 3.2886                |
| 1.4  | 2.615          | 2.792           | 2.937           | 2.7614                |
| 1.6  | 1.678          | 1.894           | 2.065           | 1.9589                |
| 1.8  | 0.6608         | 0.8761          | 1.055           | 1.0194                |

**Tabela 7** – Deslocamento Transversal em L/2 com 200 Passos e 10 elementos para Massa Móvel

| <i>Discretização: 10 elementos 200 passos</i>                    |                |                 |                 |                       |
|--|----------------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Euler</i>      |                |                 |                 |                       |
| <i>t (s)</i>   | <i>R/L = 5</i> | <i>R/L = 10</i> | <i>R/L = 50</i> | <i>Analitico Viga</i> |
| 0.2  | 0.9702         | 0.9734          | 0.9766          | 1,011294              |
| 0.4  | 1.899          | 1.921           | 1.938           | 1,976072              |
| 0.6  | 2.609          | 2.656           | 2.691           | 2,765777              |
| 0.8  | 3.148          | 3.222           | 3.28            | 3,270283              |
| 1  | 3.291          | 3.393           | 3.477           | 3,458443              |
| 1.2  | 3.028          | 3.161           | 3.272           | 3,288606              |
| 1.4  | 2.408          | 2.581           | 2.718           | 2,761416              |
| 1.6  | 1.625          | 1.813           | 1.967           | 1,958919              |
| 1.8  | 0.6539         | 0.8718          | 1.043           | 1,019482              |
| <i>w * 10<sup>-4</sup> (m) utilizando o modelo de Timoshenko</i> |                |                 |                 |                       |
|  | <i>R/L = 5</i> | <i>R/L = 10</i> | <i>R/L = 50</i> | <i>Analitico Viga</i> |
| 0.2  | 1.051          | 1.055           | 1.058           | 1.0112                |
| 0.4  | 1.992          | 2.013           | 2.03            | 1.976                 |
| 0.6  | 2.842          | 2.883           | 2.918           | 2.7657                |
| 0.8  | 3.338          | 3.41            | 3.471           | 3.2702                |
| 1  | 3.539          | 3.647           | 3.737           | 3.4584                |
| 1.2  | 3.231          | 3.375           | 3.494           | 3.2886                |
| 1.4  | 2.572          | 2.757           | 2.905           | 2.7614                |
| 1.6  | 1.758          | 1.964           | 2.132           | 1.95891               |
| 1.8  | 0.667          | 0.8923          | 1.074           | 1.01948               |

Usualmente as soluções de modelos de Massa Móvel são obtidas numericamente e apresentadas em gráficos, dificultando o acesso preciso dos valores dos deslocamentos em cada passo de tempo. Já que neste exemplo o peso da estrutura ( $0,55 * 10^5 N$ ) tem cerca de metade do valor da força aplicada no modelo de Carga Móvel ( $10^5 N$ ), ambos modelos de veículos produzem resultados na mesma ordem de grandeza. Com intuito de verificar a consistência do modelo de Massa Móvel implementado neste trabalho, atribuiu-se a massa do veículo equivalente à carga do modelo de Carga Móvel dividida pela aceleração da gravidade, isto é,  $m = P/g$ . Como o modelo de Carga Móvel de uma viga biapoiada tem solução analítica dada em Fryba (1972), foi possível a comparação dos resultados do algoritmo de Massa Móvel implementado neste trabalho.

Observando as Tabs. 6 e 7, conclui-se que ambos resultados estão coerentes, implicando na correta implementação do algoritmo de Massa Móvel aqui apresentado.

## 6. Conclusões

Uma metodologia foi apresentada para analisar em elementos finitos estruturas em barras (vigas e arcos abatidos) submetidas à ações móveis utilizando os modelos de Carga Móvel e Massa Móvel. As matrizes de rigidez exatas foram deduzidas para arcos abatidos utilizando Timoshenko, onde é considerada a deformação por cortante, e o modelo de Euler-Bernoulli, onde este efeito é desconsiderado. Além disso foram também deduzidas as matrizes de massa consistentes correspondentes. No caso estático, se observou que os resultados numéricos recuperaram exatamente as soluções analíticas, mostrando que o cálculo da matriz de rigidez está correto. Além disso, fizeram-se análises de vibração de arcos e vigas obtendo soluções numéricas que tendiam às analíticas à medida que a discretização do problema ia sendo enriquecida, o que denota uma dedução consistente para as matrizes de massa. Assumindo grandes raios para arcos ( $R/L = 10$  ou  $R/L = 50$ ), foi feita uma comparação bem sucedida dos modelos de Carga e Massa Móvel implementados neste trabalho com resultados analíticos de vigas para Carga Móvel nos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko, denotando coerência e consistência dos algoritmos implementados neste trabalho.

## 7. Referências

- Abu Hilal, M. Zibdeh H.S. (2000), Vibration analysis of beams with general boundary conditions traversed by a moving force, *Journal of Sound and Vibration*, 229, 2, 377-388.
- Bathe, K.J. (2014). *Finite Element Procedures*, 2 nd Edition, pp. 777
- Chopra, A. K. (2012) *Dynamics of Structures*, 4 th Edition, Prentice Hall
- Cifuentes A.O. (1989), Dynamic response of a beam excited by a moving mass. *Finite Elements in Analysis and Design*, 5, 237– 246.
- Clough, R.W & J. Penzien (1993) *Dynamics of Structures*, 2nd Edition, McGraw-Hill
- Esen, I & Mevkii, B. K. (2011) Dynamic Response of a Beam due to an Accelerating Moving Mass Using Moving Finite Element Approximation. *Mathematical and Computational Applications*, Vol. 16, No. 1, pp. 171-182
- Fryba, L.(1972) *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Noordhoff International Publishing, Groningen.
- Javid, F. (2011). *Vibration Suppression of Straight and Curved Beams Traversed by Moving Loads*. Master Dissertation, University of Ontario, Canada.
- Humar, J.L. (2012) *Dynamics of Structures*, 3rd Edition, CRC Press
- Khdeir, A.A; Reddy, J.N. (1995) *Free and Forced Vibration of Cross-Ply Laminated Composite Shallow Arches*.
- Nascimento Júnior P. C. (2017) *Análise Estática e Dinâmica de Arcos Abatidos de Compósitos Laminados: Uma Abordagem Pelo Método dos Elementos de Contorno* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (tese), Universidade Federal da Paraíba
- Ouyang, H.(2011) Moving-load dynamic problems: A tutorial(with a brief review). *Mechanical systems and signal processing* Vol.25, p.2039-2060.
- Paz, M. *Structural Dynamics*, 4th Edition, Chapman & Hall, 1997
- Pereira, A.C. (2016) *Análise Dinâmica pelo MEF de Vigas de Bickford-Reddy Induzida por Carregamentos*
- Petyt, M. (1990) *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press
- Queiroz, P.C.O.(2010) *Análise Estática e Dinâmica de Estruturas Reticuladas: Ambiente de Simulação em Java*. Mestrado. Universidade Federal da Paraíba.
- Reis, M., Pala, Y. (2009) Dynamic Response of a Slightly Curved Bridges Under Moving Mass Loads, *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering*, 4(3): 143-148.
- Sethi, M.C.(2012) *Dynamic Response of Beam Under Moving Mass*. Bachelor Thesis. National Institute of Technology Rourkela, India.
- Wang, R.T(1997) Vibrations of multi-span Timoshenko beams to a moving force. *Journal of Sound and Vibration* Vol.207, n.5, p.731-742.
- Wang, C.M.; Reddy,J.N.; Lee, K.H.(2000) *Shear deformable beams and plates (relationships between classical solutions)*. Elsevier.
- Wu J.J., Whittaker, A.R., Cartmell, M.P. (2000), The use of finite element techniques for calculating the dynamic response of structures to moving loads, *Computers and Structures*, 78, 789-799
- Wu. J-S., Chiang L.-K., (2004), 'Dynamic analysis of an arch due to a moving load', *Journal of Sound and Vibration*, 268: 511–534.
- Yang, F., Sedaghati, R., Esmailzadeh, E. (2008). Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method, *Journal of Sound and Vibration* 318: 850-867.
- Zhu X.Q., Law S.S.(2001), Precise time-step integration for the dynamic response of a continuous beam under moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, 240, 5, 962-970

## Anexo A (frequência natural analítica em Timoshenko e Euler-Bernoulli)

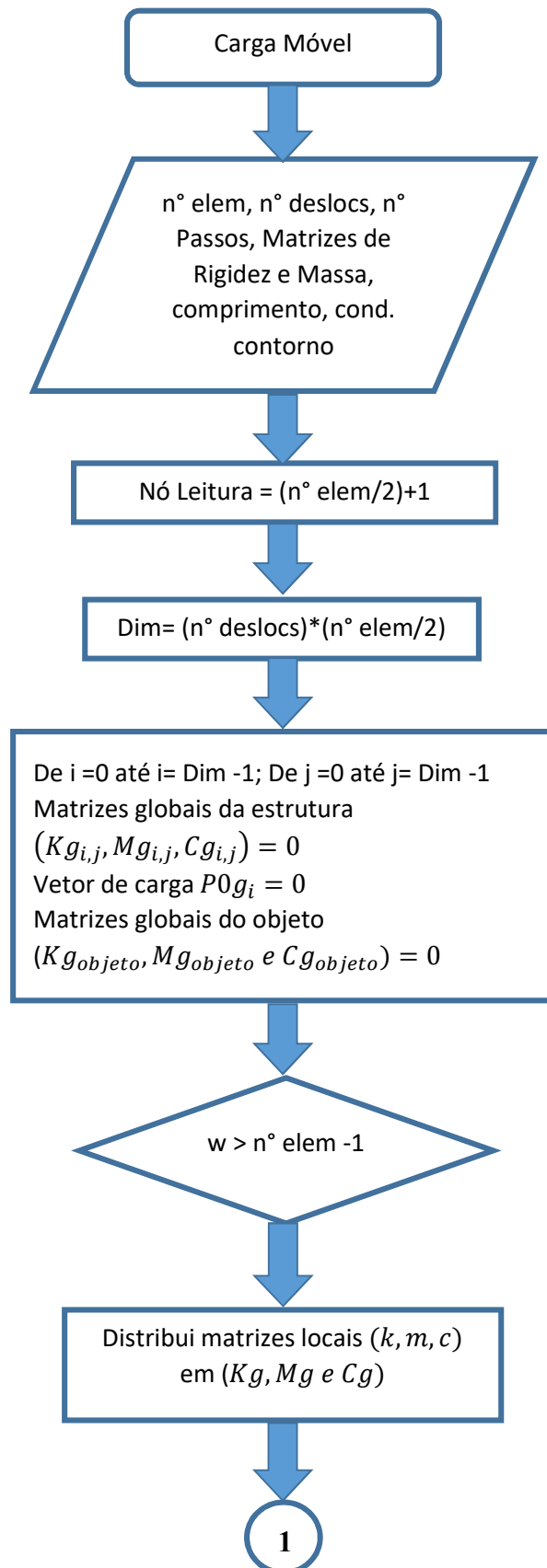
A partir das equações de movimento em Timoshenko e Euler dispostas em 28-35, chega-se à seguinte equação:

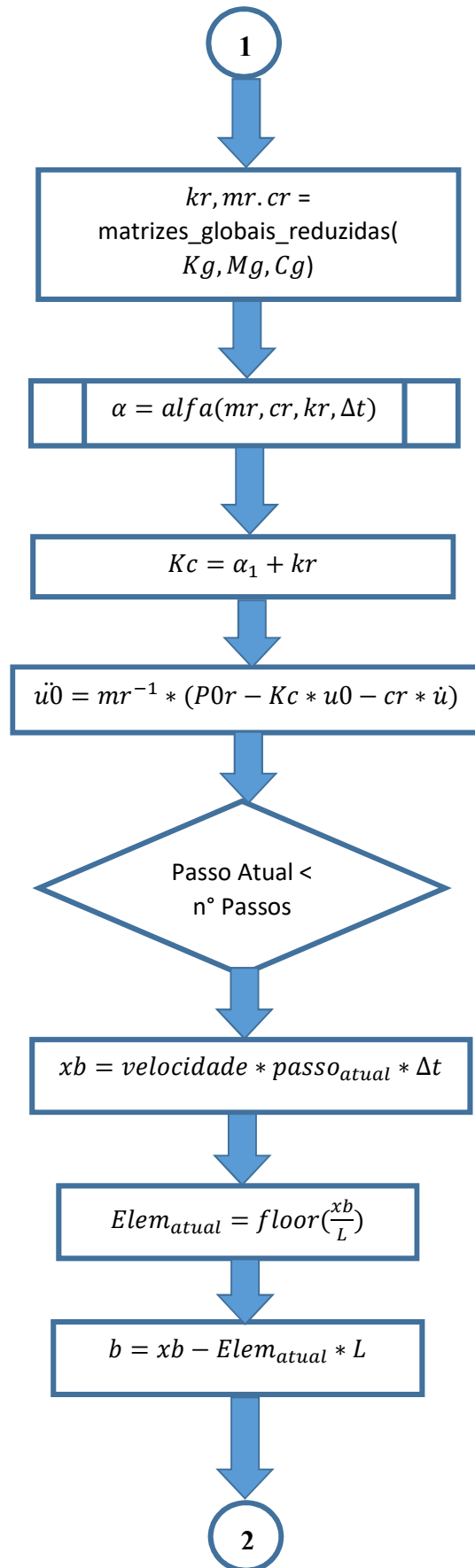
$$\begin{aligned} DetTimo(\omega, L) = & Axz * Kz * Axx^2 * Exx^2 * L^6 * \rho * \omega^2 * timo + \pi^2 * Axz * Kz * Axx^2 * Exx^2 * L^4 * R^2 * \rho * \omega^2 * i^2 \\ & * timo + \pi^2 * Dxx * Axx^2 * Exx * L^4 * \rho * \omega^2 * i^2 + \pi^4 * Dxx * Axx^2 * Exx^2 * L^2 * R^2 * \rho * \omega^2 * i^4 \\ & - Axz * Kz * Axx^2 * Exx * L^6 * R^2 * \rho^2 * \omega^4 * timo - Dxx * Axx^2 * Exx * L^6 * \rho^2 * \omega^4 * timo - \pi^2 \\ & * Dxx * Axx^2 * Exx * L^4 * R^2 * \rho^2 * \omega^4 * i^2 * timo - \pi^2 * Dxx * Axx^2 * Exx * L^4 * R^2 * \rho^2 * \omega^4 * i^2 \\ & + Dxx * Axx^2 * L^6 * R^2 * \rho^3 * \omega^6 * timo - \pi^6 * Axz * Dxx * Kz * Axx * Exx^3 * R^2 * i^6 * timo + \pi^4 \\ & * Axz * Dxx * Kz * Axx * Exx^2 * L^2 * R^2 * \rho * \omega^2 * i^4 * timo^2 + \pi^4 * Axz * Dxx * Kz * Axx * Exx^2 \\ & * L^2 * R^2 * \rho * \omega^2 * i^4 * timo - \pi^2 * Axz * Dxx * Kz * Axx * Exx * L^4 * R^2 * \rho^2 * \omega^4 * i^2 * timo^2 \end{aligned}$$

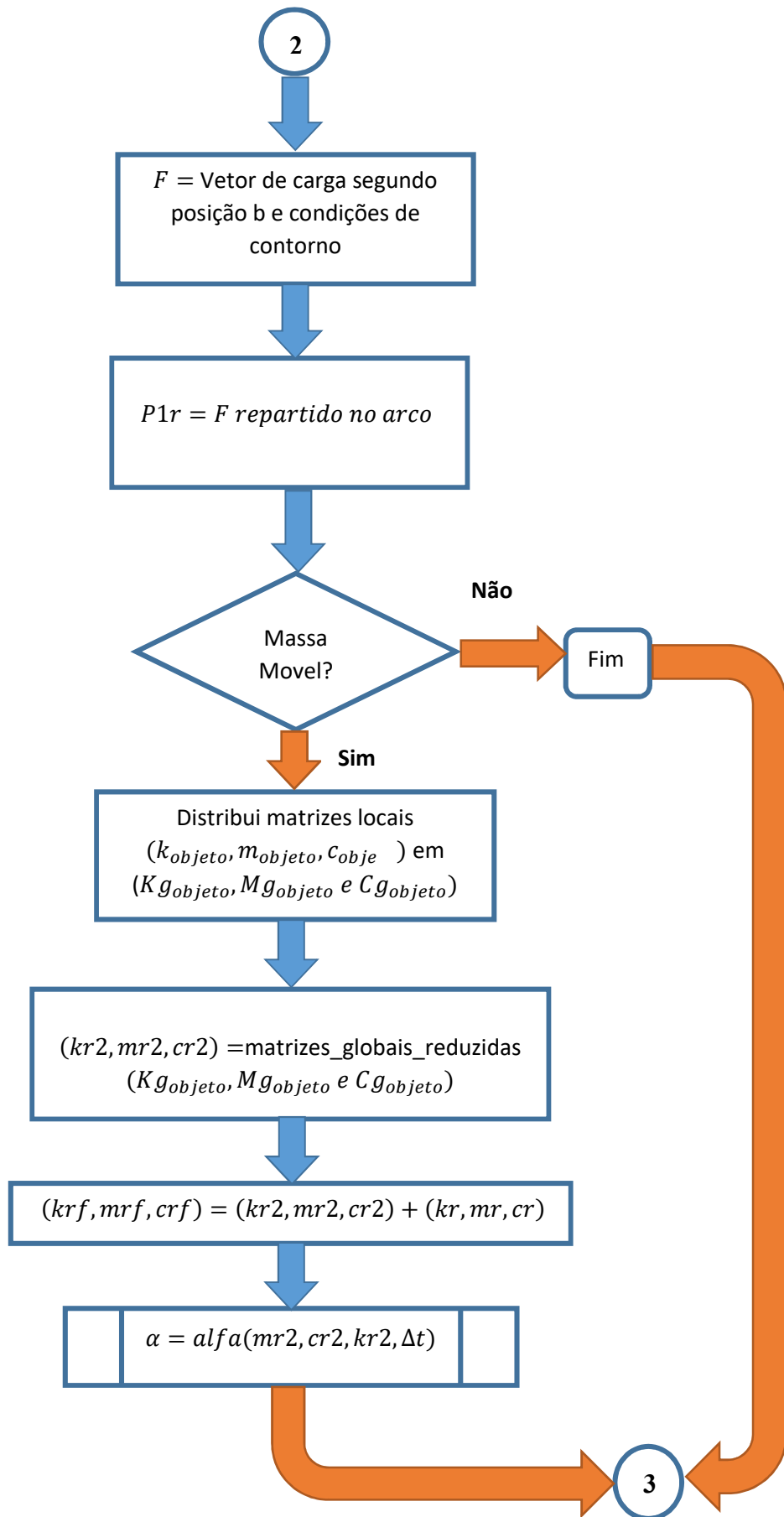
Onde  $timo = 0$  para análise segundo Euler-Bernoulli e  $timo = 1$  para Timoshenko.



## Anexo B (Fluxograma para análise da Ação de Cargas e Massas Móveis)







3

$$Pc = P1r + \alpha_1 u_0 + \alpha_2 \dot{u}_0 + \alpha_3 \ddot{u}_0$$

$$u_1 = kr^{-1} Pc$$

$$\Delta u = u_1 - u_0$$

$$u_1 = \frac{\gamma * \Delta u}{\beta * \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) u_0 + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u}_0$$

$$\ddot{u}_1 = \frac{\Delta u}{\beta * \Delta t^2} - \frac{\dot{u}_0}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{u}_0$$

$$u_0 = u_1$$

$$\dot{u}_0 = \dot{u}_1$$

$$\ddot{u}_0 = \ddot{u}_1$$

Fim

Subrotina  
 $alfa(mr, cr, kr, \Delta t)$



$$M_1 = \frac{mr}{\beta \Delta t^2} + cr \left( \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \right)$$
$$M_2 = \frac{mr}{\beta \Delta t} + cr \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right)$$
$$M_3 = mr \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) + cr * \Delta t \left( -1 + \frac{\gamma}{2\beta} \right)$$



Fim