



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE MODELOS
ESTRUTURAIS RETICULADOS POR MEIO DE ANÁLISE
EXPERIMENTAL, NUMÉRICA E ANALÍTICA

MATTHEWS BORBA CORREIA DE BRITO

João Pessoa - PB
Maio de 2017

MATTHEWS BORBA CORREIA DE BRITO

**IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE MODELOS
ESTRUTURAIS RETICULADOS, POR MEIO DE ANÁLISE EXPERIMENTAL,
NUMÉRICA E ANALÍTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a
Coordenação do Curso de Graduação de
Engenharia Civil da Universidade Federal da
Paraíba, como requisito para a obtenção do título de
Bacharel em Engenharia Civil.

Orientadora: Profa. Dra. Andrea Brasiliano

João Pessoa
Novembro de 2016

B862i Brito, Matthews Borba Correia de

Identificação das frequências de vibração de modelos estruturais reticulados, por meio de análise experimental, numérica e analítica.
Matthews Borba Correia de Brito . – João Pessoa, 2017.

52f. il.:

Orientadora: Profa. Dra. Andrea Brasiliano

Monografia (Curso de Graduação em Engenharia Civil) Campus I -
UFPB / Universidade Federal da Paraíba.

1. Frequências Naturais 2. Vibrações 3. Dinâmica 4. Modos de
vibração I. Título.

BS/CT/UFPB


CDU: 2.ed. 621(043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

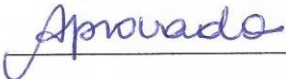
MATTHEWS BORBA CORREIA DE BRITO

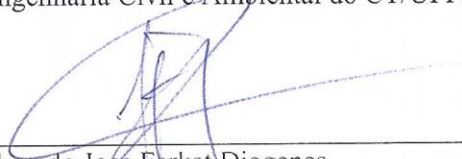
IDENTIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS DE VIBRAÇÃO DE MODELOS ESTRUTURAIS RETICULADOS POR MEIO DE ANÁLISE EXPERIMENTAL, NUMÉRICA E ANALÍTICA

Trabalho de Conclusão de Curso em 01/06/2017 perante a seguinte Comissão Julgadora:



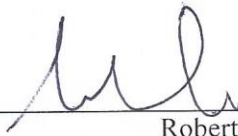
Andrea Brasiliano Silva
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB



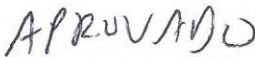


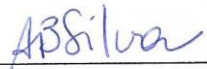
Hidelbrando Jose Farkat Diogenes
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental CT/UFPB





Roberto Leal Pimentel
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental CT/UFPB





Prof^ª. Ana Cláudia Fernandes Medeiros Braga
Matrícula Siape: 1668619
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

Prof^ª Andrea Brasiliano
Vice - Coordenadora - CCGEC
Siapa 1549557

DEDICATÓRIA

À Deus, que sempre olhou por mim, me dando
forças e determinação para concluir esta etapa
na minha vida.

Aos meu avôs Antônio (*in memoriam*) e
Nivaldo (*in memoriam*) e às minhas avós
Marlene e Júlia que sempre rezaram por mim.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Nilene, que sempre esteve presente nos momentos alegres e tristes durante o curso.

Ao meu pai, Jonas, pela oportunidade de um bom estudo desde pequeno.

À professora orientadora, Andrea Brasiliano, por toda paciência, ensinamentos e bom humor, que me fizeram acreditar que tudo daria certo. Minha admiração pela sua dedicação e competência.

Ao professor, Hidelbrando Diógenes, pela sua disponibilidade para tirar qualquer dúvida e sempre o bom humor apesar de tudo, e ao professor Roberto Pimentel, pela disponibilidade em ter aceitado o convite. É um prazer tê-los na banca examinadora.

A todos os professores do curso, pelos ensinamentos passados durante esses 5 anos.

RESUMO

Nas últimas décadas, a engenharia estrutural tem registrado diversos casos de problemas em estruturas sob a ação de carregamentos dinâmicos. Um desses problemas é a vibração das estruturas que pode ser medida através das frequências naturais das mesmas. Estas indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, depois de cessada a força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto a estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela, cuja unidade mais comum é o *Hertz*. Uma estrutura possui diversas frequências naturais tendo em vista que apresenta diversos modos de vibração. O objetivo do presente trabalho é comparar os resultados obtidos pelos métodos analítico, experimental e numérico dos valores dessas frequências de uma estrutura reticulada, por meio de um modelo experimental de uma viga de aço livre-livre. Também apresenta o propósito de mostrar como uma carga axial de compressão (protensão) pode afetar esses valores.

Palavras-chave: Frequências Naturais. Vibrações. Dinâmica. Modos de vibração.

ABSTRACT

In the last decades, structural engineering has recorded several cases of problems in structures under the action of dynamic loading. One of these problems is the vibration of structures, which can be measured through the natural frequencies of them. These indicate the rate of free oscillation of the structure, after ceasing the force that caused its movement. In similar words, it represents how much the structure vibrates when there is no force applied on it, whose most common unit is Hertz. A structure has several natural frequencies because it has several modes of vibration. The objective of the present work is to compare the results obtained by the analytical, experimental and numerical method of the values of these frequencies of a reticulated structure. It also presents the purpose of showing how an axial load of compression (protension) can affect these values. The experimental model is a free-free beam.

Keywords: Natural frequencies. Vibrations. Dynamics. Vibration Mode.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Análise de um modo de vibração do tabuleiro de uma ponte.....	11
Figura 2 - Ponte Rio-Niterói.....	13
Figura 3 - Ciclovia Tim Maia antes e depois do acidente, respectivamente.	13
Figura 4 - <i>Millennium Bridge</i>	14
Figura 5 - Ponte <i>Tacoma Narrows</i> após a ruptura devido à ressonância	18
Figura 6 - Os três primeiros modos de vibração para uma corda.....	18
Figura 7 - Três primeiros modos de vibração de uma viga com um único vão para as condições de apoio: <i>Free-Free</i> (Livre-Livre), <i>Free-Sliding</i> (Livre-Deslizante) e <i>Clamped-Free</i> (Engastado-Livre).	20
Figura 8 - Três primeiros modos de vibração de uma viga de um único vão para as condições de apoio: <i>Free-Pinned</i> (Livre-Apoiado), <i>Pinned-Pinned</i> (Biapoiado) e <i>Clamped-Pinned</i> (Engastado-Apoiado)	21
Figura 9 - Três primeiros modos de vibração de uma viga de um vão para as condições de apoio: <i>Clamped-Clamped</i> (Engastado-Engastado), <i>Clamped-Sliding</i> (Engastado-Deslizante) e <i>Sliding-Pinned</i> (Deslizante-apoiado).	22
Figura 10 - Três primeiros modos de vibração de uma viga de um vão para a condição de apoio <i>Sliding-Sliding</i> (Deslizante-Deslizante)	22
Figura 11 - Viga de aço utilizada nos ensaios	25
Figura 12 - Medição dos elementos da seção da viga	26
Figura 13 - Medição dos elementos da seção da viga	26
Figura 14 - Esticador de cabo.....	27
Figura 15 - Grampos	27
Figura 16 - Ancoragem passiva.....	28
Figura 17 - Esticador de cabo na viga	28
Figura 18 - Equipamento Sonelastic®	30
Figura 19 - Esquema do princípio do funcionamento do Sonelastic®.....	30
Figura 20 - Batida na viga (excitação)	31
Figura 21 - Espectro de potência no local de batida 1.....	33
Figura 22 - Espectro de potência no local de batida 2.....	34
Figura 23 - Espectro de potência no local de batida 3.....	34
Figura 24 - Espectro de potência no local de batida 4.....	35
Figura 25 - Espectro de potência no local de batida 5.....	35
Figura 26 - Espectro de potência no local de batida 6.....	36
Figura 27 - Espectro de potência no local de batida 7.....	36
Figura 28 - Espectro de potência no local de batida 8.....	37
Figura 29 - Espectro de potência no local de batida 9.....	37
Figura 30 - Espectro de potência no local de batida 1 (com protensão).....	39
Figura 31 - Espectro de potência no local de batida 2 (com protensão).....	39
Figura 32 - Espectro de potência no local de batida 3 (com protensão).....	40
Figura 33 - Espectro de potência no local de batida 4 (com protensão).....	40
Figura 34 - Espectro de potência no local de batida 5 (com protensão).....	41
Figura 35 - Espectro de potência no local de batida 6 (com protensão).....	41
Figura 36 - Espectro de potência no local de batida 7 (com protensão).....	42
Figura 37 - Espectro de potência no local de batida 8 (com protensão).....	42
Figura 38 - Espectro de potência no local de batida 9 (com protensão).....	43
Figura 39 - 1º modo de vibração da viga.....	45

Figura 40 - 2° modo de vibração da viga.....	45
Figura 41 - 3° modo de vibração da viga.....	46
Figura 42 - 4° modo de vibração da viga.....	46
Figura 43 - 5° modo de vibração da viga.....	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores de λ_i para três tipos diferentes de apoio, e para os cinco primeiros modos de vibração	20
Tabela 2 - 5 primeiras frequências naturais de vibração da viga livre-livre não protendida.....	33
Tabela 3 - Valores das frequências naturais, em <i>Hz</i> , da viga sem protensão e suas médias	38
Tabela 4 - Valores das frequências naturais, em <i>Hz</i> , da viga com protensão e suas médias.....	44
Tabela 5 - Comparativo entre os métodos para a viga sem protensão	47
Tabela 6 - Comparativo entre a viga sem e com protensão.....	48

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	11
1.1. Dinâmica das estruturas	11
1.2. Problemas dinâmicos existentes	12
1.3. Justificativa	14
2. OBJETIVO	16
2.1. Objetivo geral	16
2.2. Objetivos específicos	16
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	17
3.1. Frequências naturais	17
3.2. Frequências naturais em vigas retas	19
4. METODOLOGIA	25
4.1. Dados gerais	25
4.2. Método analítico	29
4.3. Método experimental	29
4.4. Método numérico	31
5. RESULTADOS E DISCUSSÕES	33
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
REFERÊNCIAS	52

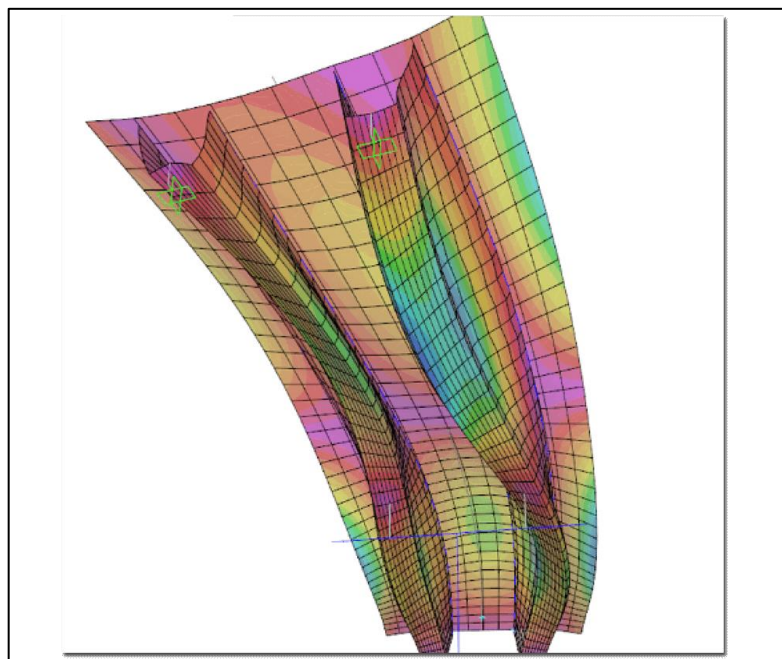
1. INTRODUÇÃO

1.1. Dinâmica das estruturas

“A dinâmica das estruturas tem por objetivo a determinação de deslocamentos, velocidades e acelerações de todos os elementos constituintes de uma estrutura submetida a cargas dinâmicas” (LIMA e SANTOS, 2008, p.1). Ou seja, é a parte da análise estrutural que trata das cargas que variam com o tempo, seja sua intensidade, direção ou posição.

Até os dias de hoje, essa parte da análise de estruturas não é considerada na sua forma mais “pura”, isto porque as cargas dinâmicas que apresentam menores variações em função do tempo são transformadas em cargas estáticas equivalentes que apresentam resultados aproximados. Isso se dá devido a maior dificuldade em se trabalhar com as características dinâmicas de qualquer carga. Contudo, existem certas estruturas na construção civil em que a consideração dos efeitos dinâmicos das ações é essencial, como: estruturas em zonas de risco sísmico; estruturas sujeitas a ação do vento, principalmente as de mais baixa frequência natural; estruturas da aeronáutica e naval; estruturas submetidas a cargas móveis entre outras. Nesses casos a ruptura provavelmente ocorrerá pelos efeitos como vibrações, fadiga, entre outros gerados por essas ações, tornando-se essencial a sua análise, Figura 1.

Figura 3 – Análise de um modo de vibração do tabuleiro de uma ponte.



Fonte: <http://www.csiportugal.com/software-features/4/csi-bridge>.

Segundo Bolina *et al.* (2014, p;1), “a análise dinâmica pode ser caracterizada por meio de três propriedades fundamentais: os modos naturais de vibração, os coeficientes de amortecimento, e as frequências naturais de vibração da estrutura”. Esse trabalho busca calcular os resultados das frequências naturais de uma viga de aço, com e sem protensão, usando alguns métodos distintos visando uma comparação dos resultados.

1.2. Problemas dinâmicos existentes

Nas últimas décadas, cada vez mais os problemas dinâmicos vêm sendo registrados no contexto da engenharia estrutural, eles são derivados de cargas geradas por efeitos como: ação do vento, terremotos, tráfego de veículos, movimento de pessoas, etc. Todos esses efeitos tem em comum que alguma propriedade deles varia em função do tempo, o vento, por exemplo, tem sua magnitude, direção e sentidos variando conforme se passe o tempo.

Como exemplo em relação ao vento, podemos citar a ponte Rio-Niterói, Figura 2, em que vibrações são geradas em sua superestrutura metálica dos vãos centrais, pela ocorrência de ventos relativamente fracos. Quando a rajada encontra a superestrutura da ponte, 70 metros acima do nível do mar, formam-se turbilhões (vórtices) alternados por cima e por baixo da mesma. Segundo Moehlecke, “se esse escoamento de ar mantiver uma determinada velocidade média por mais de um ou dois minutos, a ponte inicia um processo de oscilação vertical também chamado de fenômeno aeroelástico.

Outro exemplo de problema dinâmico no Brasil foi a ciclovia Tim Maia, Figura 3, esta entrou em colapso devido a ação de ondas que não foram previstas em projeto, as ondas também entram como cargas dinâmicas já que sua atuação na estrutura varia ao longo do tempo. Fora do Brasil podemos citar a *Millennium Bridge*, Figura 4, em que no dia de sua inauguração, cerca de 400 pessoas estavam sobre ela, provocando sua vibração. Segundo a revista *Polyteck*, a explicação encontrada para a vibração da passarela foi que o centro de gravidade de uma pessoa caminhando desloca-se para a direita e esquerda com a metade da frequência com a qual ela caminha. O passo médio de caminhada de uma pessoa é aproximadamente 2 Hz, logo, o seu centro de massa oscila com frequência próxima de 1 Hz. Como a *Millennium* possuía um modo de vibração lateral de aproximadamente 1,1 Hz, o movimento do centro de gravidade dos pedestres entrou em ressonância com a frequência natural da ponte.

Figura 2 – Ponte Rio-Niterói.



Fonte: http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/323/n/fim_das_interdicoes_na_ponte_rio-niteroi

Figura 3 – Ciclovia Tim Maia antes e depois do acidente, respectivamente.



Fonte: <http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2016/04>.

Segundo ASSUNÇÃO (2009, p.2), devido a uma maior capacidade tecnológica aliada a economia e ao arrojo dos engenheiros, as estruturas estão cada vez mais esbeltas, leves, o que as tornam mais “flexíveis”, deixando-as mais suscetíveis a efeitos de cargas dinâmicas. Com todos esses novos elementos, cada vez mais, é indispensável uma análise mais correta de problemas dessa natureza.

Figura 4 – *Millennium Bridge*.

Fonte: https://simple.wikipedia.org/wiki/Millennium_Bridge.

Apesar de todas as hipóteses consideradas com carregamentos estáticos equivalentes, para suprir o efeito dinâmico, utilizadas na área de cálculo estrutural apresentarem resultados coerentes para garantir a segurança, alguns problemas com essa origem não podem ser resolvidos utilizando-se dessas hipóteses, como a fadiga e as vibrações, por exemplo.

1.3. Justificativa

Quando se é necessário realizar análises de estruturas, em que estejam inclusas ações dinâmicas, os engenheiros civis apresentam grandes dificuldades para tal. Isto se deve, principalmente, à ausência de disciplinas da área de dinâmica na grade curricular da graduação em Engenharia Civil da UFPB. Os novos engenheiros civis saem do curso sem conhecer problemas como vibrações, por exemplo, provocados por ações ou cargas dinâmicas.

Neste sentido, este trabalho tem como objetivo proporcionar um primeiro contato com a dinâmica das estruturas de modo a apresentar suas propriedades dinâmicas, e suas formas de cálculo. Assim como permitir que o aluno seja capaz de calcular frequências de vibração a fim de poder verificar junto às normas, quando necessário, os limites de vibração de estruturas (ver norma de concreto NBR 6118/2014).

Além disso, esse trabalho também espera servir como um incentivo para que nossa universidade introduza na grade curricular de engenharia civil algumas cadeiras, pelo menos introdutórias, na área de dinâmica, a fim de prover aos engenheiros uma sensibilidade com esses tipos de problemas presentes em muitas obras da engenharia civil.

Ainda como motivação para esse trabalho tem-se avaliar a viabilidade da aplicação de uma técnica baseada na resposta acústica obtida através da excitação, pouco abordada para determinação de frequências naturais de estruturas da engenharia civil.

2. OBJETIVO

2.1. Objetivo geral

O presente trabalho tem como objetivo geral possibilitar um primeiro contato com a dinâmica das estruturas, proporcionando o aprendizado no cálculo de frequências de vibração de estruturas reticuladas, por meio de uma análise experimental, numérica e analítica de vigas com condições de apoio livre-livre. É objetivo ainda, avaliar a técnica baseada na resposta acústica das estruturas a fim de determinar suas frequências naturais, uma vez que sua aplicação não é comum às estruturas da engenharia civil.

2.2. Objetivos específicos

Como objetivos específicos deste trabalho podem-se citar:

- Construir um modelo físico, reduzido, de uma viga em aço;
- Submeter o modelo a uma carga de protensão;
- Realizar ensaios dinâmicos através de resultados acústicos na viga de aço, com e sem carga de protensão a fim de determinar suas frequências de vibração;
- Calcular as frequências analíticas do modelo sem protensão e com protensão;
- Reproduzir o modelo físico numericamente usando um software de análise estrutural, e obter suas frequências de vibração;
- Comparar os resultados obtidos da análise experimental, numérica e analítica, para o caso com protensão e sem protensão.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1. Frequências naturais

As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, depois de cessada a força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto a estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela (Bolina *et al.* 2014, p.1). Elas são dadas normalmente em *Hertz* (Hz), e são diretamente proporcionais à rigidez da estrutura e inversamente proporcionais à massa.

Uma estrutura pode vibrar em diversas frequências naturais, entretanto a mais importante é a primeira, que possui o menor valor e é conhecida como a frequência fundamental. Para a engenharia civil essa frequência fundamental é de extrema importância, pois os calculistas têm que garantir que independentemente da carga que venha atuar na estrutura, a vibração gerada não atinja esse valor.

No caso de uma estrutura atingir o valor citado entrará em ressonância. Esse fenômeno ocorre quando um sistema físico recebe energia por meio de excitações de frequência iguais a uma de suas frequências naturais de vibração. Assim, este sistema passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores, e quando isso acontece numa estrutura da engenharia civil, pode chegar à sua ruptura total. Um caso muito famoso é o da ponte *Tacoma Narrows* (Figura 5) que quando atingida por um vento de aproximadamente 70 km/h começou a oscilar com grandes amplitudes entrando em ressonância e indo à ruptura total.

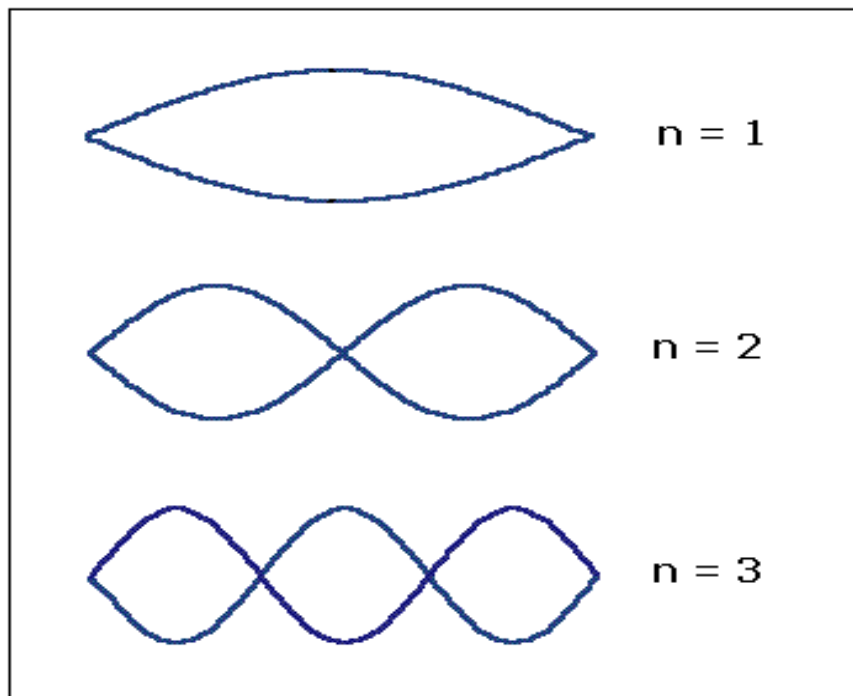
Cada frequência natural apresenta sua forma de vibrar, isso é conhecido como os modos de vibração. Um exemplo desses modos pode ser encontrado na Figura 6 que mostra as três primeiras formas para uma corda presa nas duas pontas.

Figura 5 – Ponte *Tacoma Narrows* após a ruptura devido à ressonância.



Fonte: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/pedagogia/ressonancia-o-curioso-caso-da-ponte-tacoma-narrows/41429#>.

Figura 6 – Os três primeiros modos de vibração para uma corda.



Fonte: <http://www.ifba.edu.br/fisica/nfl/fge2/praticas/cordasVibrantes.html>.

3.2. Freqüências naturais em vigas retas

Para a análise de uma viga com relação a sua vibração devem-se adotar as seguintes suposições gerais:

- São uniformes ao longo do vão;
- São compostas por um material elástico linear, homogêneo e isotrópico;
- São esbeltas;
- Apenas são consideradas deformações axiais. Faces planas se mantêm planas;
- Nenhuma força axial é aplicada na viga;
- O centro de cisalhamento na seção coincide com o centro de massa.

Depois de assumidas todas as suposições, segundo Blevins (2001, p.104) a frequência natural, em *hertz*, pode ser dada através da Equação (1).

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Onde,

λ_i é um parâmetro adimensional que é função das condições de contorno aplicadas a viga;

L é o comprimento da viga;

m é a massa por unidade de comprimento;

E é o módulo de elasticidade longitudinal do material;

I é o momento de inércia da viga; e

i representa o modo de vibração.

3.2.1 Vigas de apenas um vão

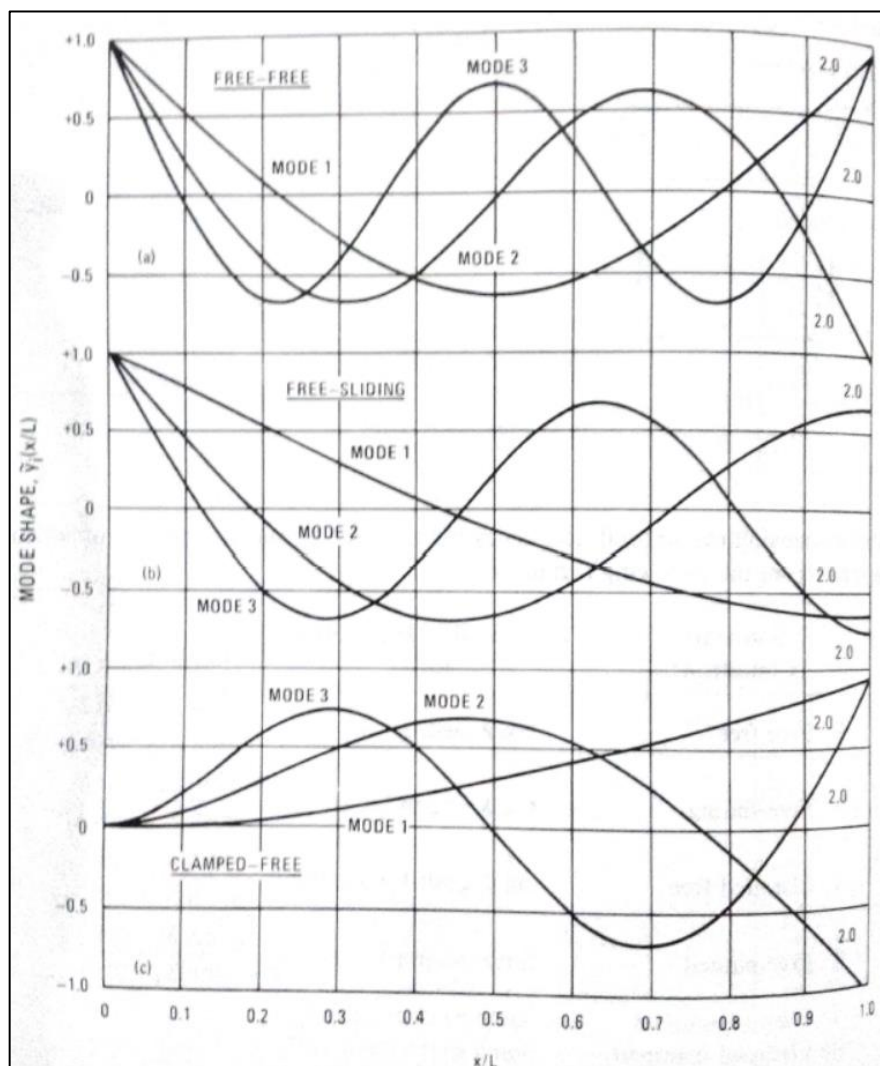
Para as vigas de apenas um vão os valores de λ_i podem ser obtidos a partir da Tabela 1. As formas de vibrar são afetadas pelas condições de contorno assim como pela quantidade de vãos, podendo-se verificar esses modos nas figuras 7, 8, 9 e 10.

Tabela 1 – Valores de λ_i para três tipos diferentes de apoio, e para os cinco primeiros modos de vibração.

MODOS DE VIBRAÇÃO	LIVRE – LIVRE	ENGASTADO-LIVRE	APOIADO-APOIADO
	$\lambda_i; i=1,2,3$	$\lambda_i; i=1,2,3$	$\lambda_i; i=1,2,3$
1	4,73004	1,8751041	3,14159265
2	7,8532	4,6940911	6,28318531
3	10,9956	7,8547874	9,42477796
4	14,1372	10,995541	12,5663706
5	17,2788	14,137168	15,7079633

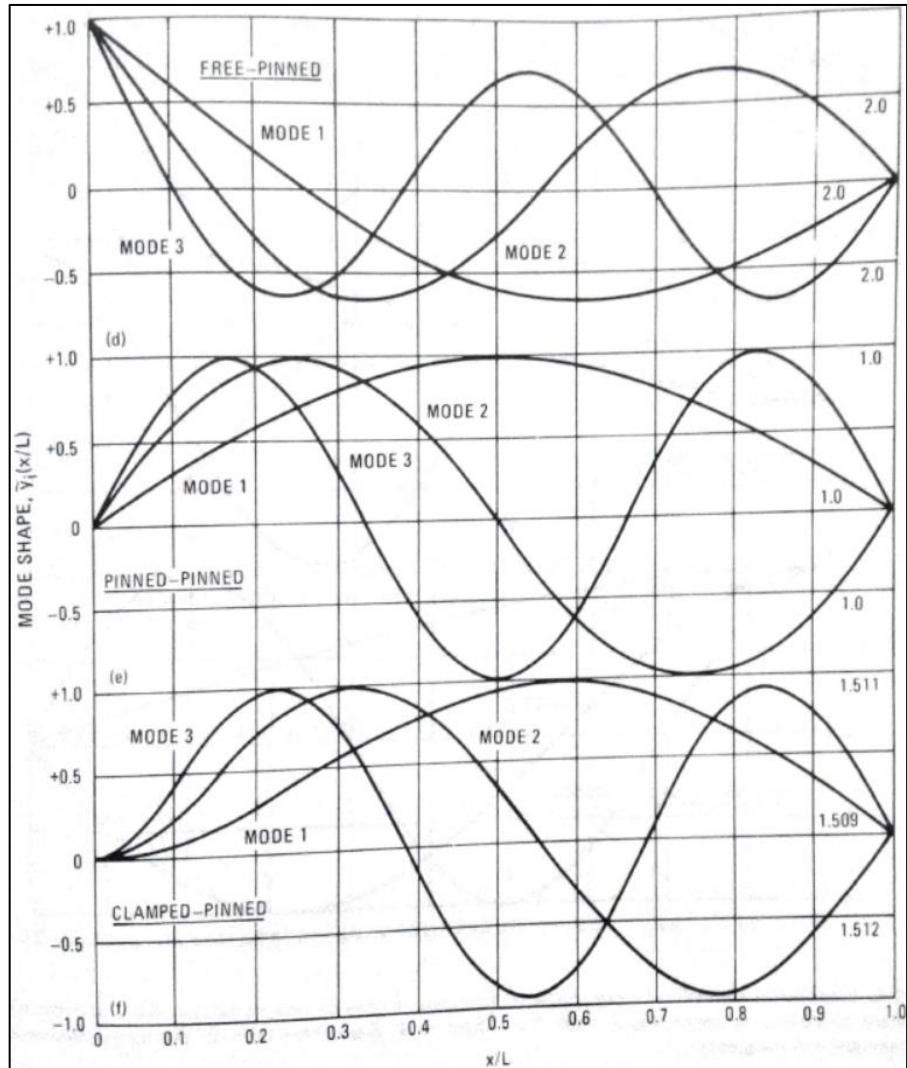
Fonte: Adaptado de Blevins (2001).

Figura 7 – Três primeiros modos de vibração de uma viga com um único vão para as condições de apoio: *Free-Free* (Livre-Livre), *Free-Sliding* (Livre-Deslizante) e *Clamped-Free* (Engastado-Livre).



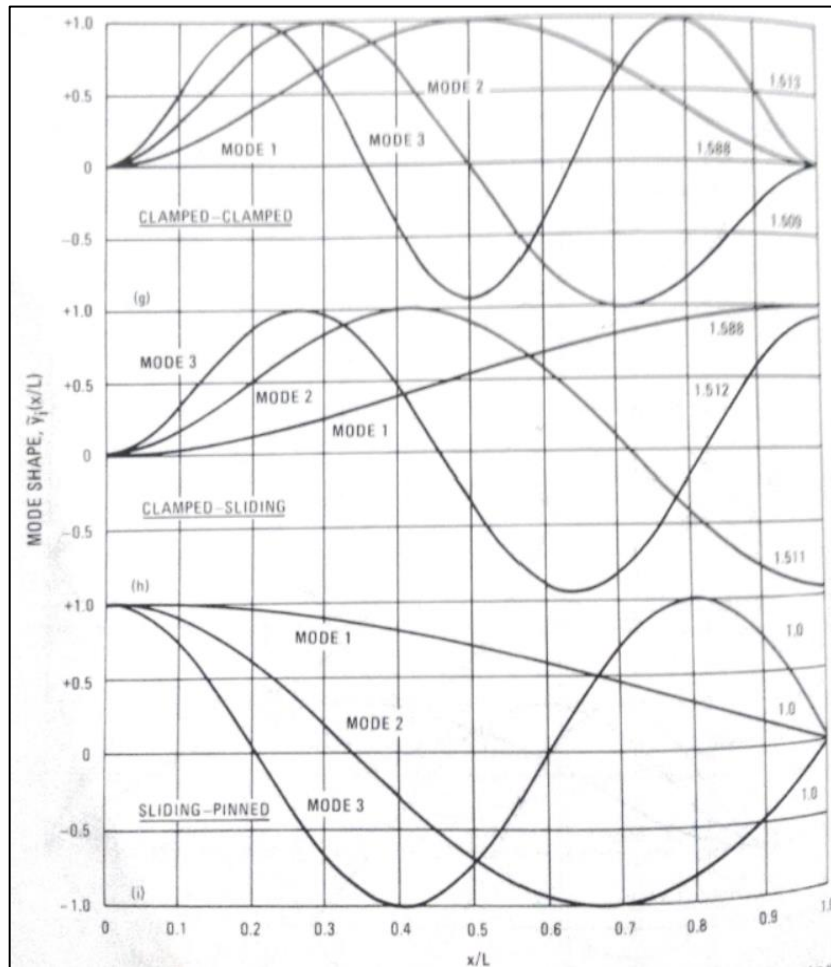
Fonte: Blevins (2001).

Figura 8 – Três primeiros modos de vibração de uma viga de um único vão para as condições de apoio: *Free-Pinned* (Livre-Apoiado), *Pinned-Pinned* (Biapoiado) e *Clamped-Pinned* (Engastado-Apoiado).



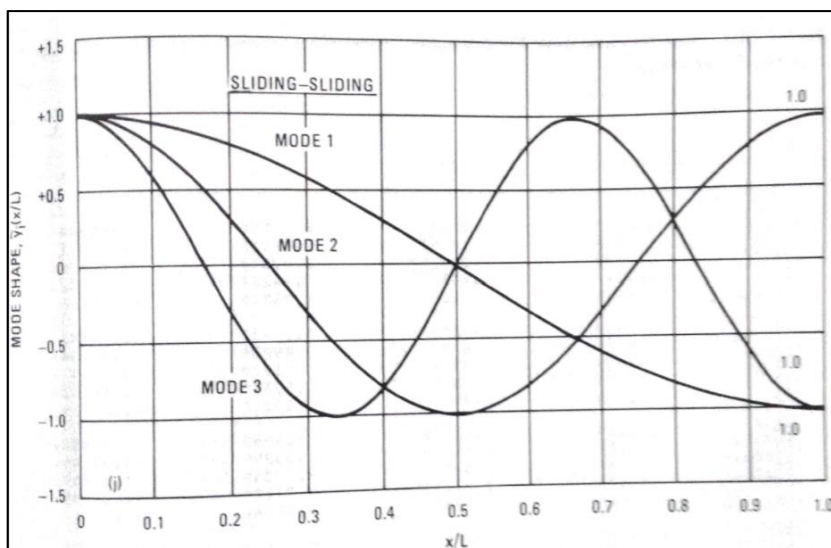
Fonte: Blevins (2001).

Figura 9 – Três primeiros modos de vibração de uma viga de um vão para as condições de apoio: *Clamped-Clamped* (Engastado-Engastado), *Clamped-Sliding* (Engastado-Deslizante) e *Sliding-Pinned* (Deslizante-apoiado).



Fonte: Blevins (2001).

Figura 10 – Três primeiros modos de vibração de uma viga de um vão para a condição de apoio *Sliding-Sliding* (Deslizante-Deslizante).



Fonte: Blevins (2001).

3.2.2 Viga de múltiplos vãos

Para as vigas com mais de um vão, ainda é usada a Equação (1), porém os valores para λ_i são diferentes, variando de acordo com a quantidade de vãos. Outro fator que afeta esses tipos de vigas são a semelhança ou não dos vãos.

3.2.3 Vigas submetidas a uma força axial

Segundo Blevins (2001, p.144), “uma carga de tração aplicada axialmente a uma viga aumenta a frequência natural da viga. Uma carga de compressão diminui a frequência natural da mesma.” Para a determinação desses valores, existem soluções exatas para alguns tipos de condições de contorno. Para um vão biapoiado a Equação (2) é utilizada, enquanto que para a condição apoio-deslizante aplica-se a Equação (3).

$$f_i = \frac{i^2 \pi^2}{8\pi L^2} \left(1 + \frac{PL^2}{EI i^2 \pi^2} \right)^{1/2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

$$f_i = \frac{i^2 \pi^2}{8\pi L^2} \left(1 + \frac{4PL^2}{EI i^2 \pi^2} \right)^{1/2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Para as outras formas possíveis de apoios de uma viga de um vão, Blevins (2001, p144) fornece uma fórmula aproximada para o efeito dessa carga através da Equação (4):

$$\frac{f_i(p \neq 0)}{f_i(p = 0)} = \left(1 + \frac{P}{|P_b|} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_i^2} \right)^{1/2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Onde,

$f_i(p \neq 0)$ é a frequência natural a ser calculada;

$f_i(p = 0)$ é a frequência natural para a viga em força axial;

P é a carga axial;

P_b é a carga de flambagem da viga;

λ_1 é o valor do parâmetro para o primeiro modo de vibração; e

λ_i é o valor do parâmetro para o modo que esteja sendo calculado.

Como a condição de contorno na viga desse trabalho é a livre-livre, foi utilizada a Equação (4). Para o valor da carga de flambagem para o caso desse trabalho foi usada a Equação (5).

$$P_b = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (5)$$

Onde,

L é o comprimento da viga;

E é o módulo de elasticidade longitudinal do material; e

I é o momento de inércia da viga.

Ainda, segundo Blevins (2001), a diferença do valor das frequências naturais deve ficar em torno de 1%, não passando muito disso, com a carga P variando entre $\pm P_b$. Se uma carga expressiva de compressão for aplicada a viga a frequência fundamental dela vai para 0 até a viga flambar. Já no oposto, uma carga muito grande de tração as frequências se aproximam das de um cabo tensionado já que as forças associadas a tração se tornam muito maiores que a rigidez da viga.

4. METODOLOGIA

Para a determinação das frequências naturais de vibração de vigas, realizaram-se três análises: experimental, analítica e numérica.

4.1. Dados gerais

A estrutura que servirá de base para a análise dos resultados segundo os objetivos desse trabalho é uma viga de aço SAE 1020, Figura 11. Para as medidas da seção foi utilizado um paquímetro, figuras 12 e 13. Seguem abaixo todas as propriedades da viga:

- Comprimento da viga (L) = 1,50 m;
- Espessura das abas = 2,45 mm;
- Momento de Inercia da viga deitada (I) = 0,0000000138207 m⁴;
- Modo de Elasticidade para o aço SAE 1020 (E) = 205 GPa;
- Massa por unidade de comprimento (m) = 1,66 Kg/m;
- Condição de contorno: Livre-Livre.

Figura 11 – Viga de aço utilizada nos ensaios.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 12 – Medição dos elementos da seção da viga.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 13 – Medição dos elementos da seção da viga.



Fonte: Autoria Própria.

Para a protensão foram utilizadas as seguintes ferramentas:

- Cabo de aço encapado;
- Esticador de cabo, Figura 14; e
- Grampos para garantir a ancoragem passiva, Figura 15.

Figura 14 – Esticador de cabo.



Fonte: <http://www.solucoesindustriais.com.br>.

Figura 15 – Grampos.



Fonte: <http://www.solucoesindustriais.com.br>.

Depois de obtidas essas ferramentas, soldou-se uma chapa de aço em cada extremidade da viga, como pode ser visto na Figura 13, para passar o cabo de aço no meio da seção da viga. Após passar o cabo, fez-se a ancoragem passiva, conforme a Figura 16, em um dos lados e colocou-se o esticador do outro lado, Figura 17, onde foi aplicada a força axial. Não foi possível medir a força aplicada devido à falta de equipamentos com essa função.

Figura 16 – Ancoragem passiva.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 17 – Esticador de cabo na viga.



Fonte: Autoria Própria.

4.2. Método analítico

A análise analítica consistiu em se aplicar a fórmula, para determinação de frequências naturais de vigas retas, encontrada no Blevins (2001), e reproduzida a seguir:

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m} \right)^{1/2} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

Foram calculados os valores das frequências naturais até o quinto modo de vibração para a viga livre-livre.

4.3. Método experimental

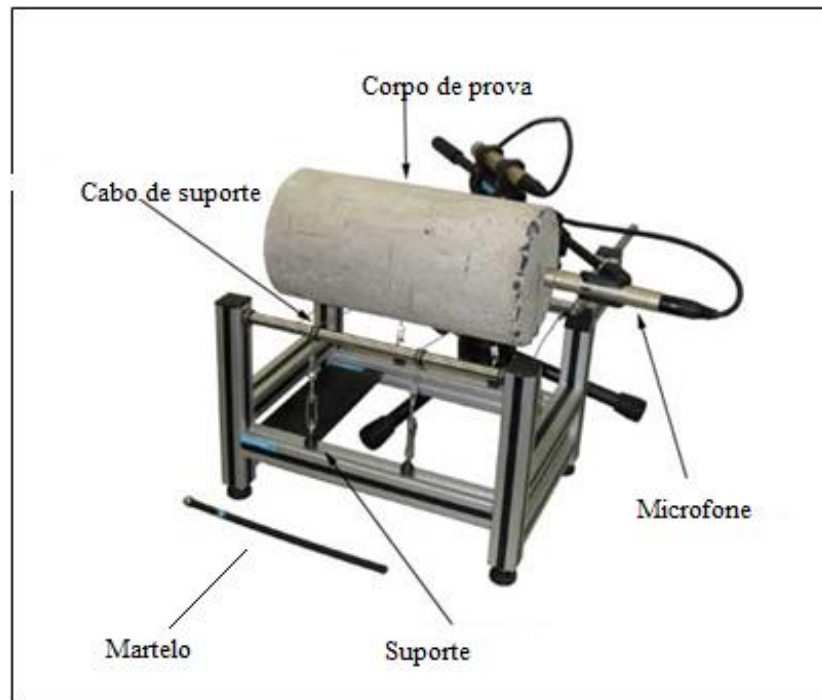
Para a determinação das frequências experimentalmente foi utilizado um captador acústico (microfone) associado ao software Sonelastic®, Figura 18. Todo o equipamento de aquisição era composto pelas seguintes partes:

- Um captador acústico (microfone), que fornece sinais acústicos, a partir dos quais são traduzidos em espectro;
- Um suporte para o elemento;
- Um pequeno martelo para excitar a viga; e
- Um computador com o *software* licenciado para a obtenção dos resultados.

Na Figura 19 podemos ver o passo a passo do princípio de funcionamento do Sonelastic®, desde a excitação aos resultados fornecidos por este. O *software* utiliza transformada rápida de *Fourier* (FFT – *Fast Fourier Transform*). A análise de *Fourier* converte um sinal do seu domínio original (frequentemente tempo ou espaço) para uma representação no domínio da frequência e vice-versa. No caso, esse domínio da frequência seria o espectro.

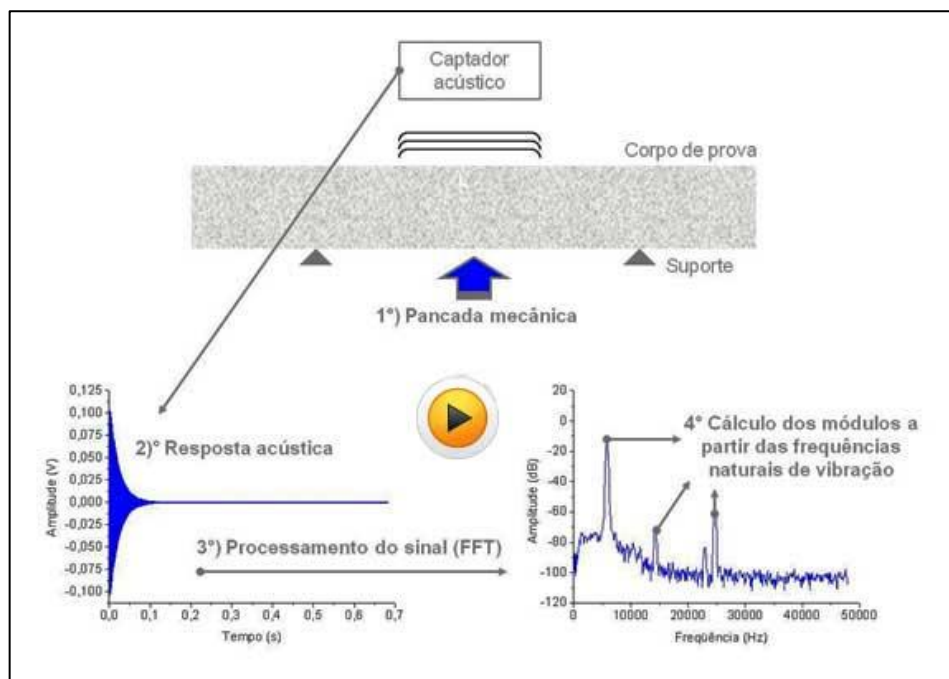
Com o equipamento devidamente instalado foi pendurada a viga utilizando fios de náilon para obter condições de contorno bem próximos a livre-livre, após isso foram executadas as excitações através de batidas na viga, Figura 20. Os locais das batidas foram pré-determinados. Primeiro dividiu-se a viga em 10 segmentos, e as batidas ocorreram na divisão de cada segmento. Essa divisão teve o propósito de evitar pontos nodais nos testes (pontos em que os deslocamentos são nulos em cada modo de vibração). Ao total foram 9 locais, o local 1 foi a 0,15 m, o 2 a 0,30 m, o 3 a 0,45 m, o 4 a 0,60 m, o 5 a 0,75 m, o 6 a 0,90 m, o 7 a 1,05m, o 8 a 1,20m e o 9 a 1,35 m, sendo feito o experimento 3 vezes em cada local, totalizando 27 batidas para a viga sem carga axial e 27 para a viga protendida.

Figura 18 – Equipamento Sonelastic®.



Fonte: www.atcp-ndt.com (adaptado).

Figura 19 – Esquema do princípio do funcionamento do Sonelastic®.



Fonte: www.atcp.com.br.

Figura 20 – Batida na viga (excitação).



Fonte: Autoria Própria.

4.4. Método numérico

Para a determinação dos valores das frequências naturais de cada modo de vibração pelo método numérico foi utilizado um código computacional desenvolvido por Brasiliano (2001) em MatLab. Como dados de entrada, as seguintes informações eram fornecidas:

- Número de trechos = 1; (este valor varia caso haja variação nas propriedades físicas e/ou geométricas dos elementos ao longo da viga)
- Número de elementos do trecho = 30; (se refere à discretização da viga)
- Momento de inércia da seção = $1,38207 \text{ cm}^4$;
- Área da seção = $2,33 \text{ cm}^2$;
- Comprimento dos elementos = 5 cm;
- Modo de Elasticidade do aço = 205 GPa;
- Densidade do aço = $7,86 \text{ ton/m}^3$; e
- Condição de contorno = 0 (livre-livre).

Considerando os dados de entrada, eram montadas as matrizes de rigidez e de massa da estrutura com o objetivo de escrever a equação de movimento à vibração livre (Clough e Penzien, 1993) e determinar seus autovalores (frequências) e autovetores (modos de vibração). Como arquivo de saída do código computacional utilizado tinham-se as cinco primeiras frequências e os correspondentes modos naturais de vibração.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Após seguir os passos do método analítico, obteve-se a Tabela 2 com os resultados para as 5 primeiras frequências naturais da viga sem força axial.

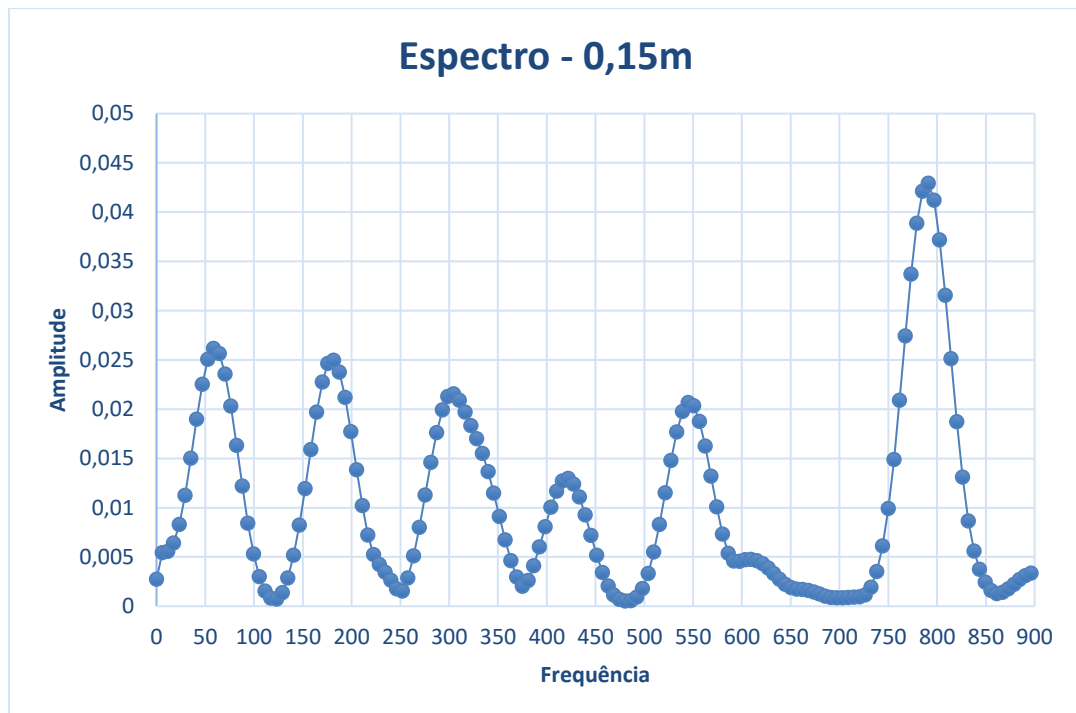
Tabela 2 – 5 primeiras frequências naturais de vibração da viga livre-livre não protendida.

I	F_1 (Hz)
1	65,38
2	180,23
3	353,32
4	584,05
5	872,47

Fonte: Autoria Própria.

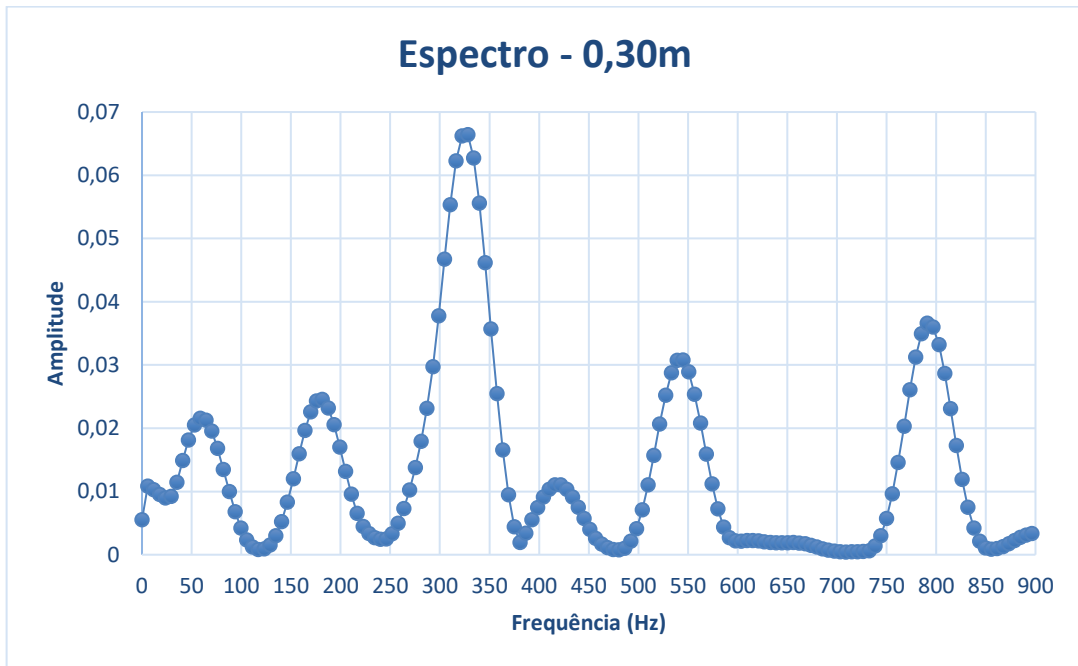
Os resultados das frequências naturais, em *hertz*, obtidos pelo método experimental para a viga sem protensão serão mostrados nas figuras 21 a 29, que apresentam os espectros médios de potência dos sinais acústicos obtidos em cada um dos 9 locais que foram aplicadas as batidas. Os picos maiores representam os valores das frequências.

Figura 21 – Espectro de potência no local de batida 1.



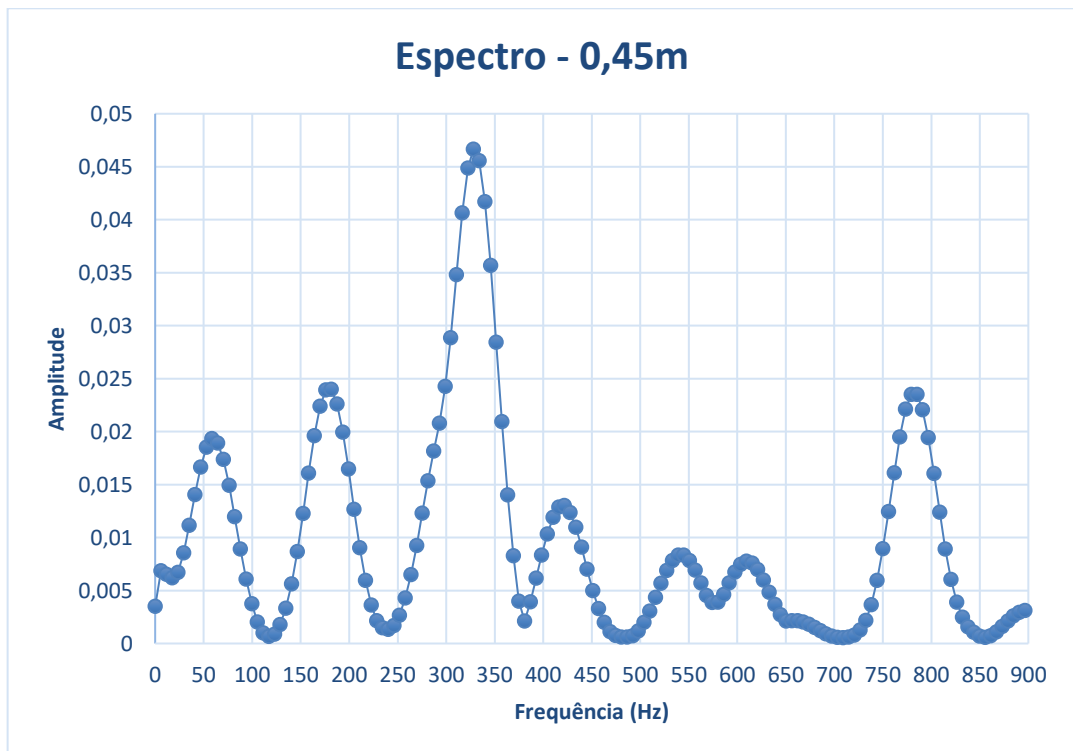
Fonte: Autoria Própria.

Figura 22 – Espectro de potência no local de batida 2.



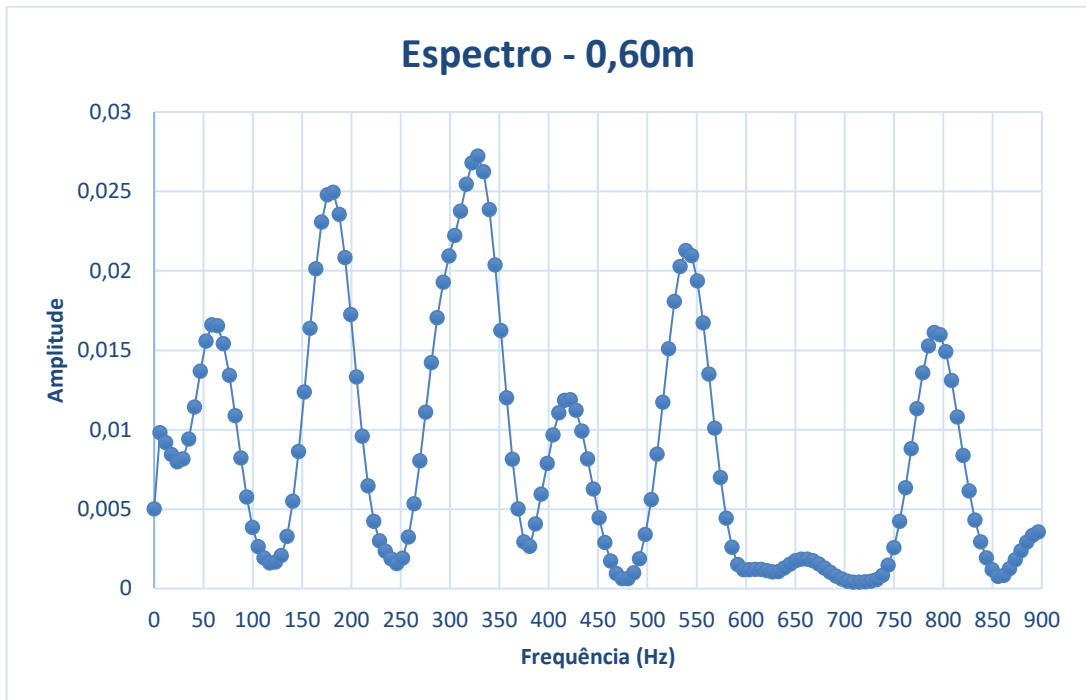
Fonte: Autoria Própria.

Figura 23 – Espectro de potência no local de batida 3.



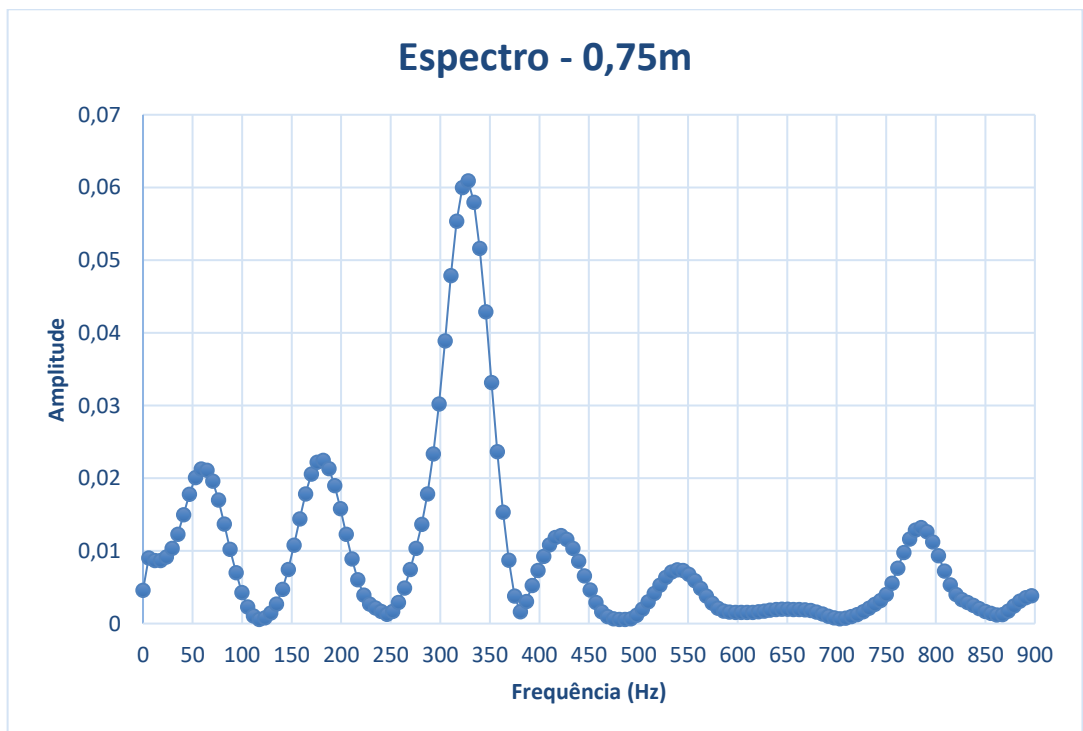
Fonte: Autoria Própria.

Figura 24 – Espectro de potência no local de batida 4.



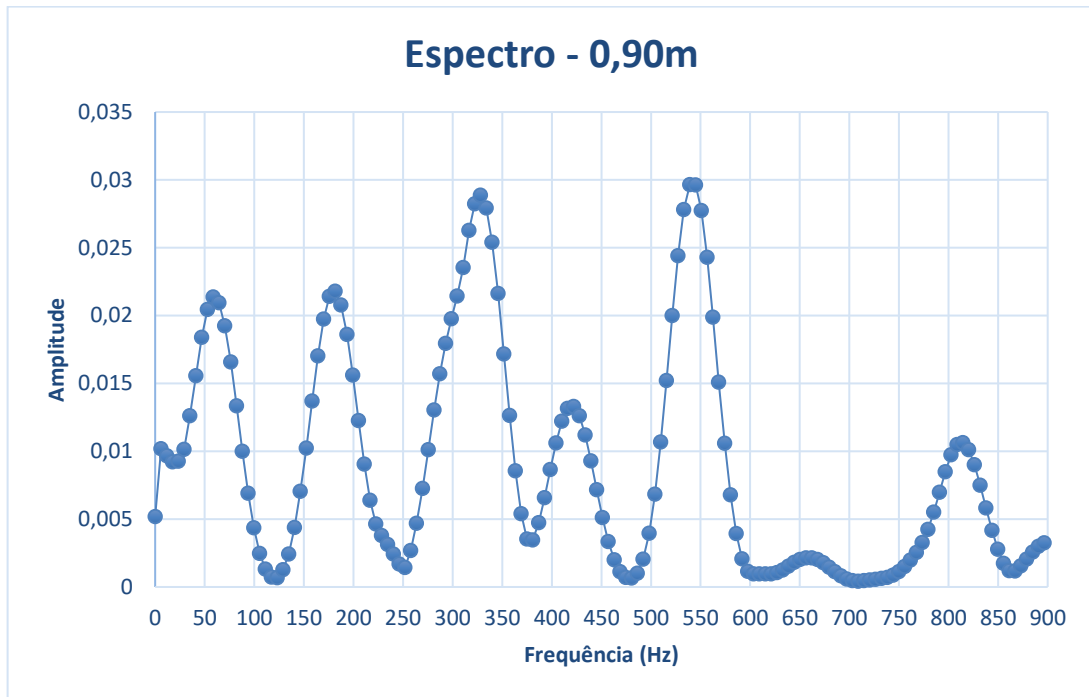
Fonte: Autoria Própria.

Figura 25 – Espectro de potência no local de batida 5.



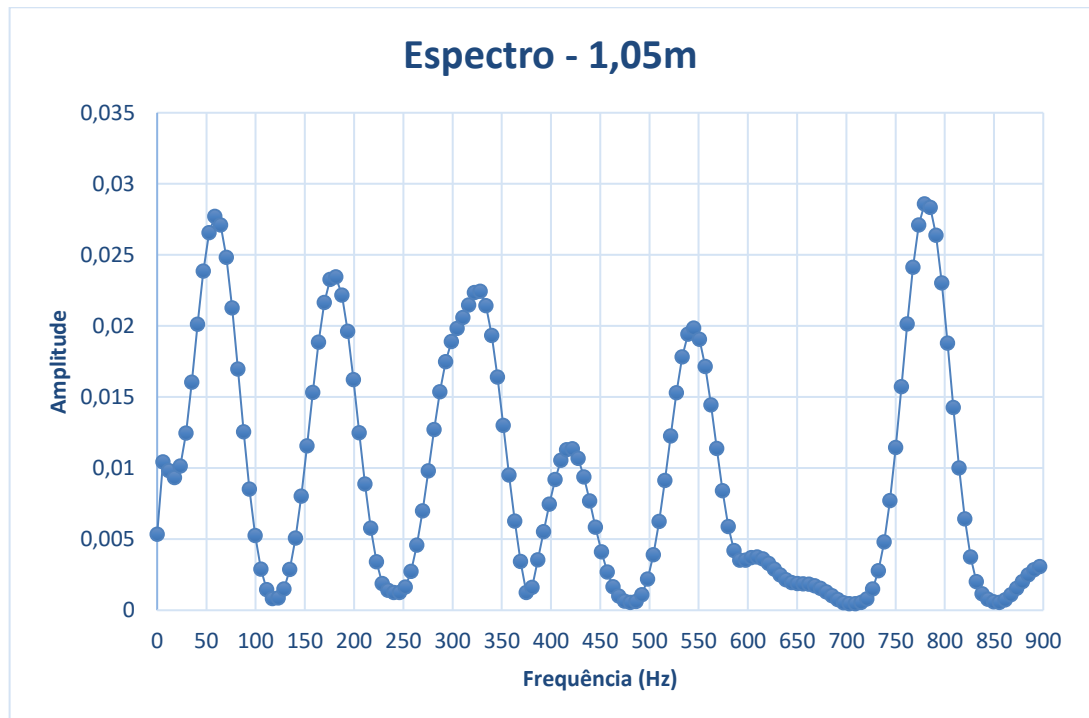
Fonte: Autoria Própria.

Figura 26 – Espectro de potência no local de batida 6.



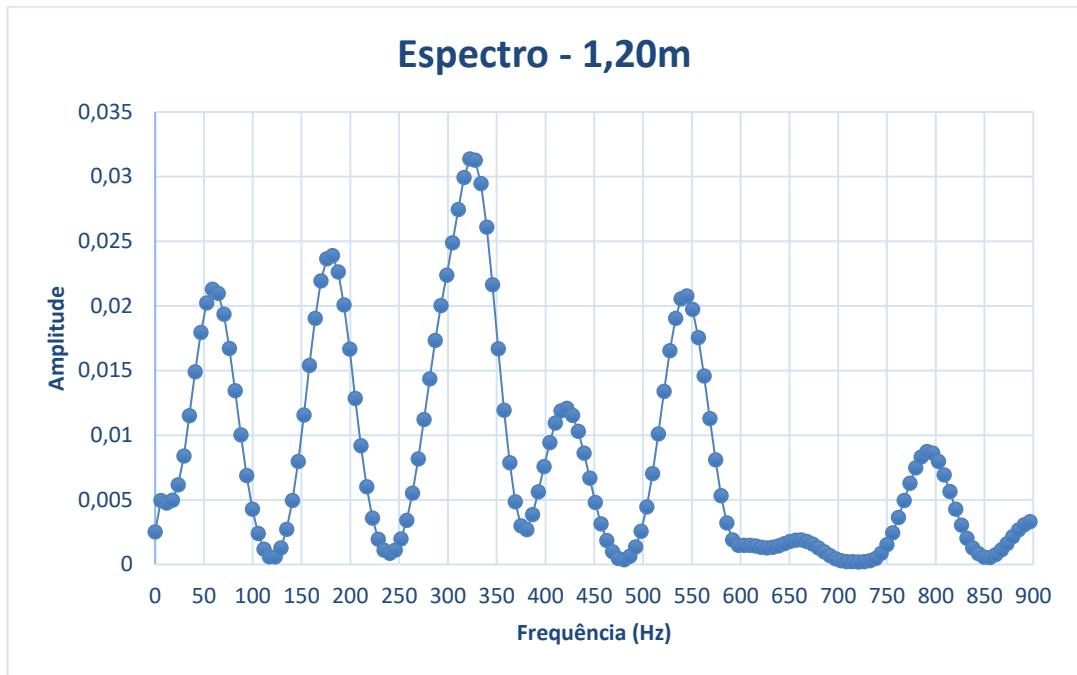
Fonte: Autoria Própria.

Figura 27 – Espectro de potência no local de batida 7.



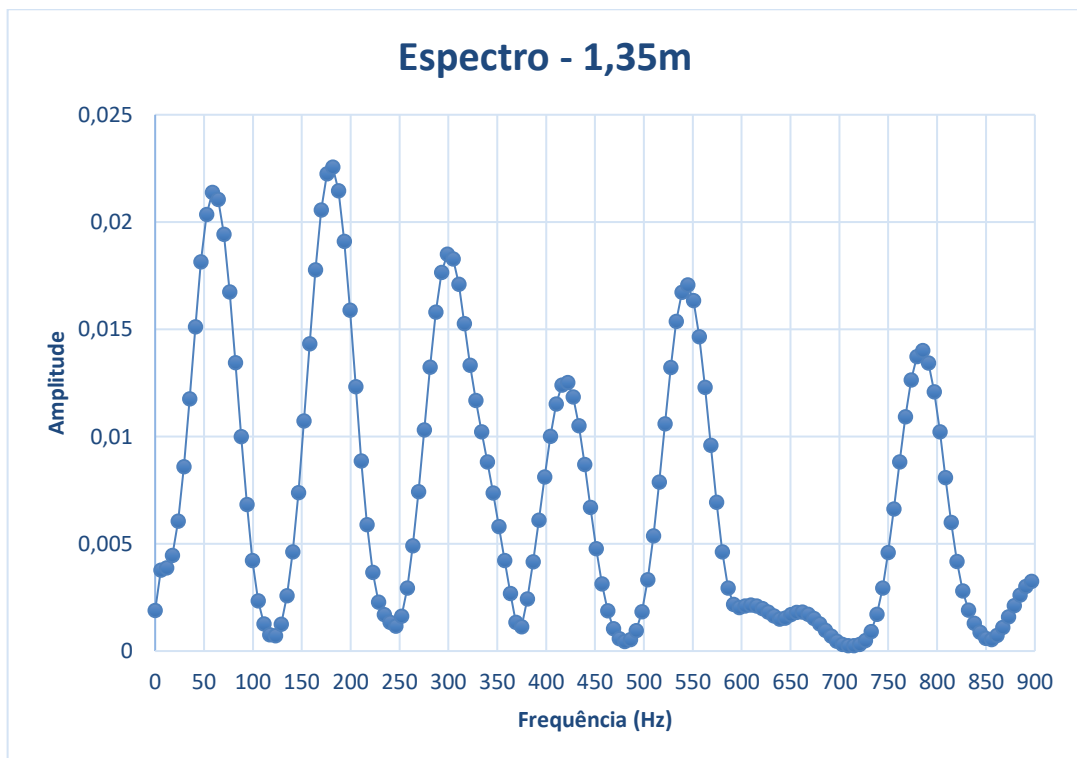
Fonte: Autoria Própria.

Figura 28 – Espectro de potência no local de batida 8.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 29 – Espectro de potência no local de batida 9.



Fonte: Autoria Própria.

Depois de apresentados um espectro médio para cada local das batidas, os valores das frequências naturais podem ser vistos na Tabela 3. Os valores em negrito são as médias que serão levadas em conta para a comparação.

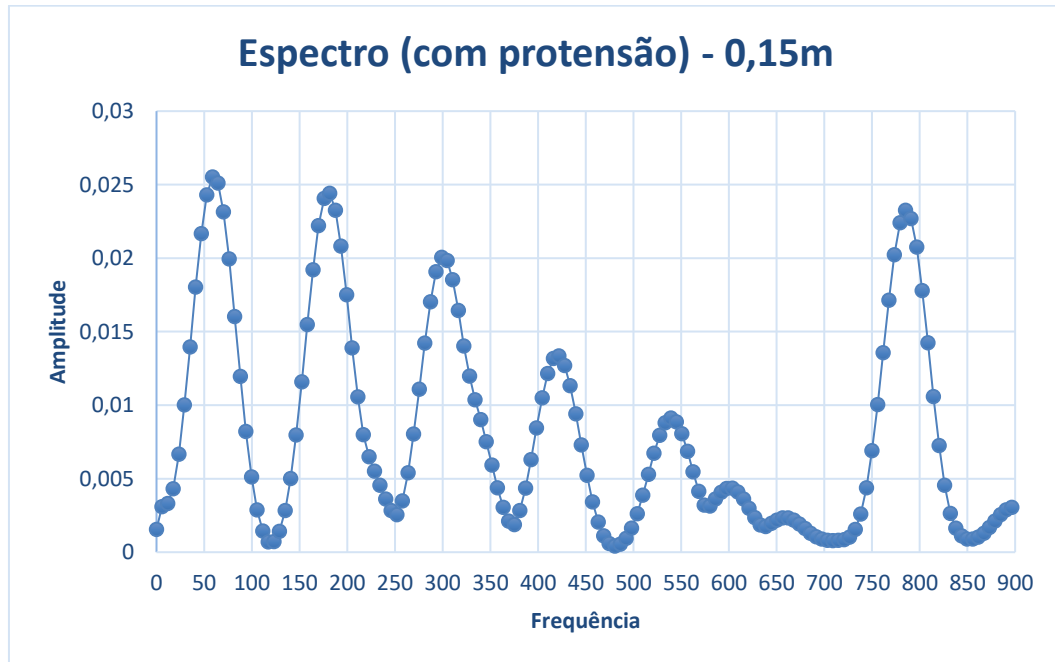
Tabela 3 – Valores das frequências naturais, em Hz, da viga sem protensão e suas médias.

<i>Local da batida</i>	<i>Batida N°</i>	<i>Frequência 1° modo</i>	<i>Frequência 2° modo</i>	<i>Frequência 3° modo</i>	<i>Frequência 4° modo</i>	<i>Frequência 5° modo</i>
1	1	59,473	-	-	549,418	796,952
	2	59,462	180,899	-	545,864	785,504
	3	60,174	179,515	-	544,479	786,365
	Média	59,70	180,21	-	546,59	789,61
2	1	60,419	178,826	320,151	546,183	792,677
	2	60,191	180,265	325,384	542,105	792,296
	3	60,103	178,53	325,644	542,111	792,476
	Média	60,24	179,21	323,73	543,47	792,48
3	1	59,228	178,901	328,787	-	780,016
	2	59,014	178,488	328,996	-	782,059
	3	60,195	179,676	328,713	-	787,68
	Média	59,48	179,02	328,83	-	783,25
4	1	61,188	178,881	328,315	541,216	793,021
	2	-	179,514	-	538,041	792,767
	3	60,481	179,56	306,342	542,107	794,625
	Média	60,83	179,32	317,33	540,45	793,47
5	1	60,813	-	326,6	-	784,468
	2	-	-	-	-	-
	3	-	-	-	-	-
	Média	60,81	-	326,60	-	784,47
6	1	60,772	179,032	328,365	541,843	811,61
	2	58,809	181,045	327,272	541,921	813,371
	3	61,087	181,165	327,899	540,985	808,371
	Média	60,22	180,41	327,85	541,58	811,12
7	1	59,238	178,902	-	543,591	779,706
	2	59,512	178,573	327,765	544,05	779,821
	3	59,697	-	320,404	544,547	783,667
	Média	59,48	178,74	324,08	544,06	781,06
8	1	60,223	179,802	326,506	542,404	793,546
	2	60,67	179,272	321,244	544,885	791,256
	3	59,814	179,908	325,814	542,581	789,365
	Média	60,24	179,66	324,52	543,29	791,39
9	1	60,294	180,056	-	544,229	786,224
	2	60,1	180,048	-	542,447	781,042
	3	59,906	179,902	-	544,809	783,444
	Média	60,10	180,00	-	543,83	783,57

Fonte: Autoria Própria.

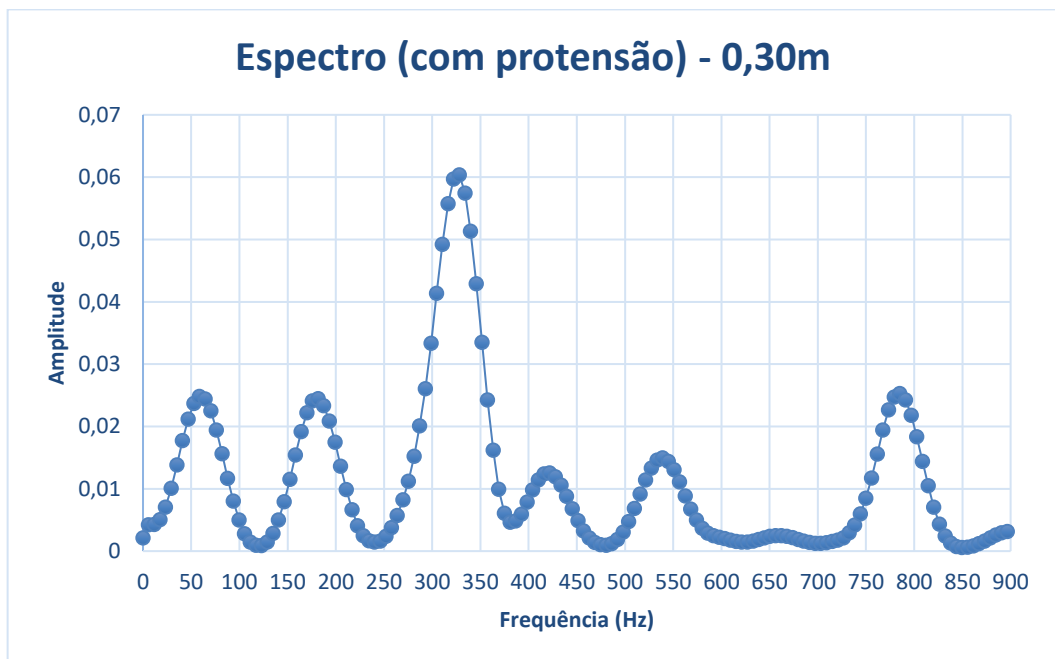
Já a viga protendida obteve os seguintes espectros médios representados nas figuras 30 a 38. Os valores das frequências naturais (picos do espectro) podem ser vistos na Tabela 4.

Figura 30 – Espectro de potência no local de batida 1 (com protensão).



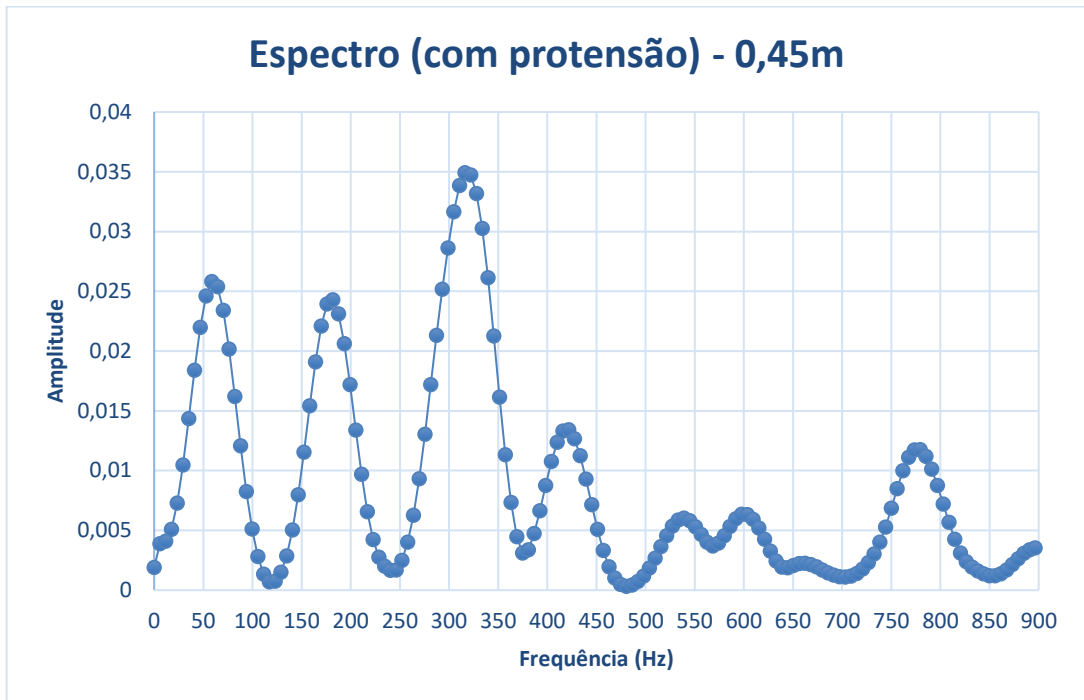
Fonte: Autoria Própria.

Figura 31 – Espectro de potência no local de batida 2 (com protensão).



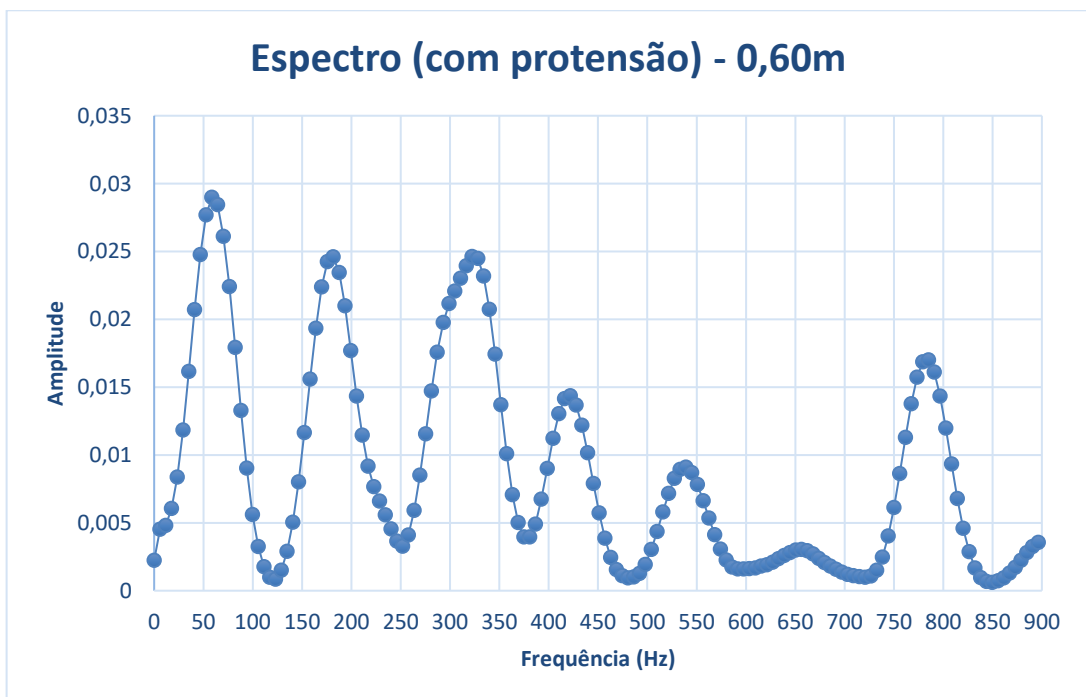
Fonte: Autoria Própria.

Figura 32 – Espectro de potência no local de batida 3 (com protensão).



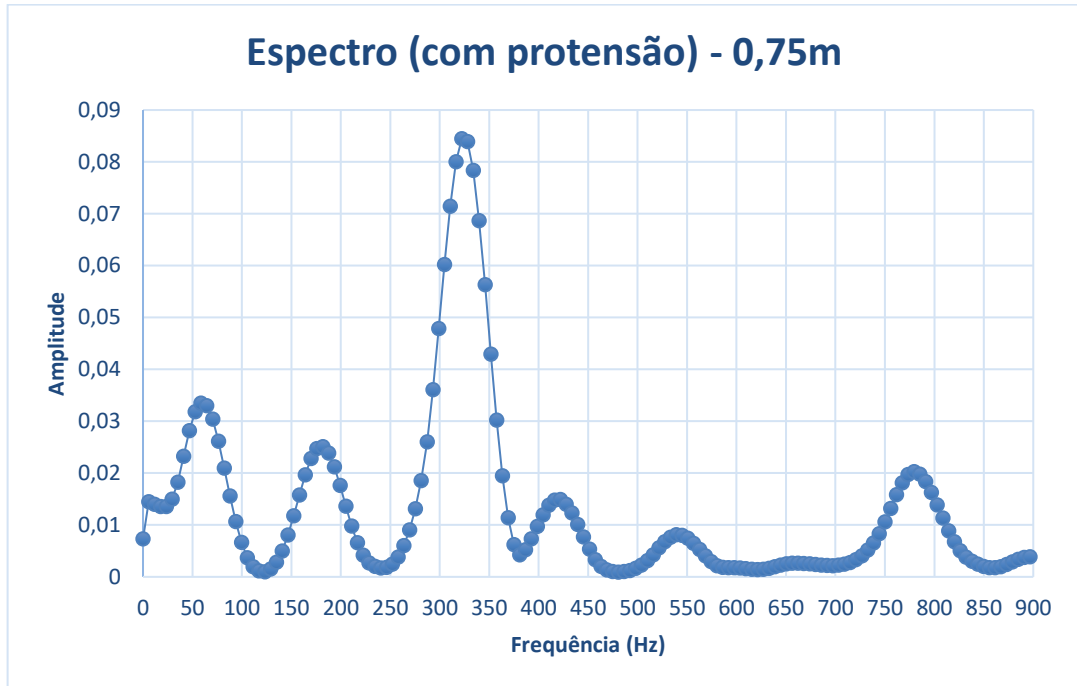
Fonte: Autoria Própria.

Figura 33 – Espectro de potência no local de batida 4 (com protensão).



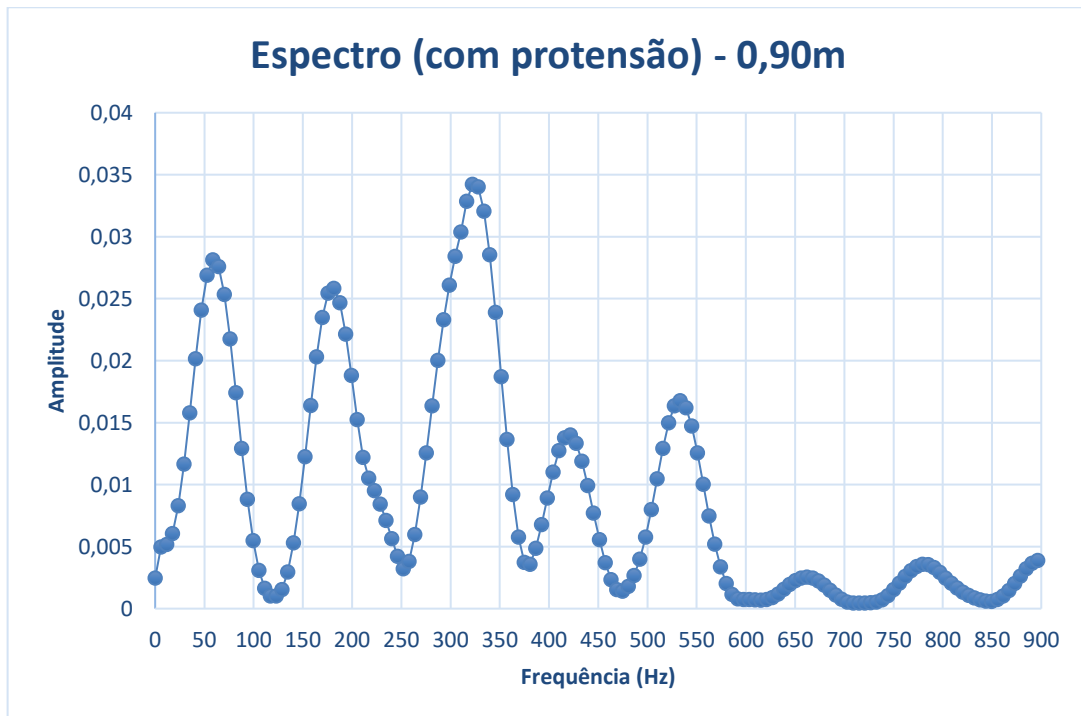
Fonte: Autoria Própria.

Figura 34 – Espectro de potência no local de batida 5 (com protensão).



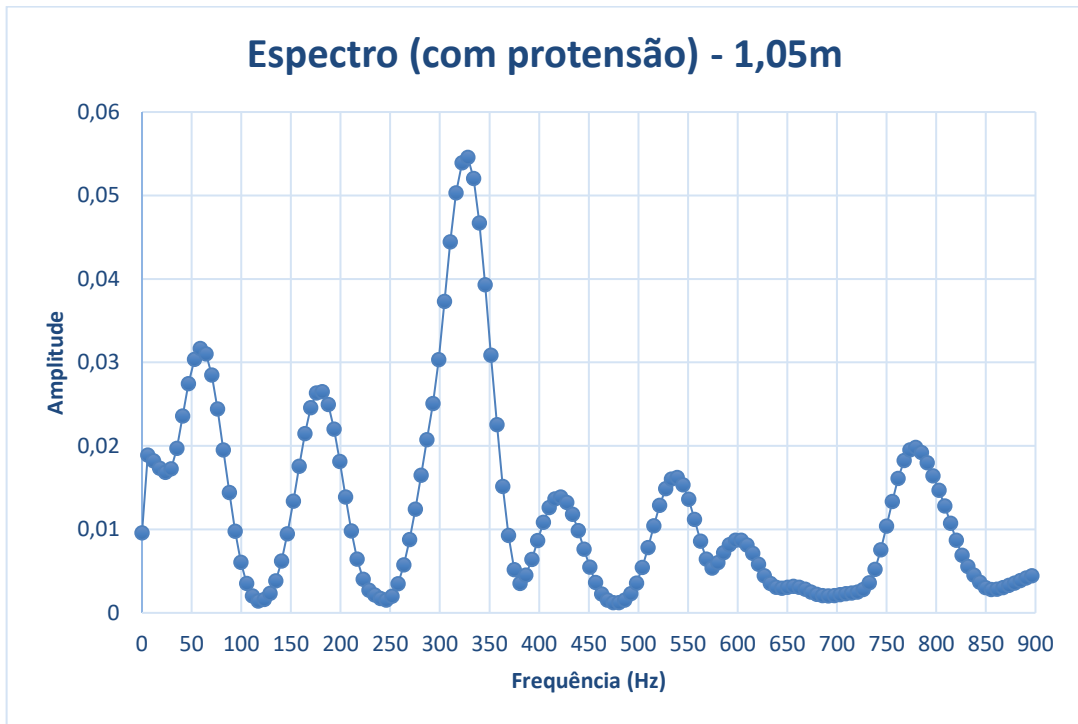
Fonte: Autoria Própria.

Figura 35 – Espectro de potência no local de batida 6 (com protensão).



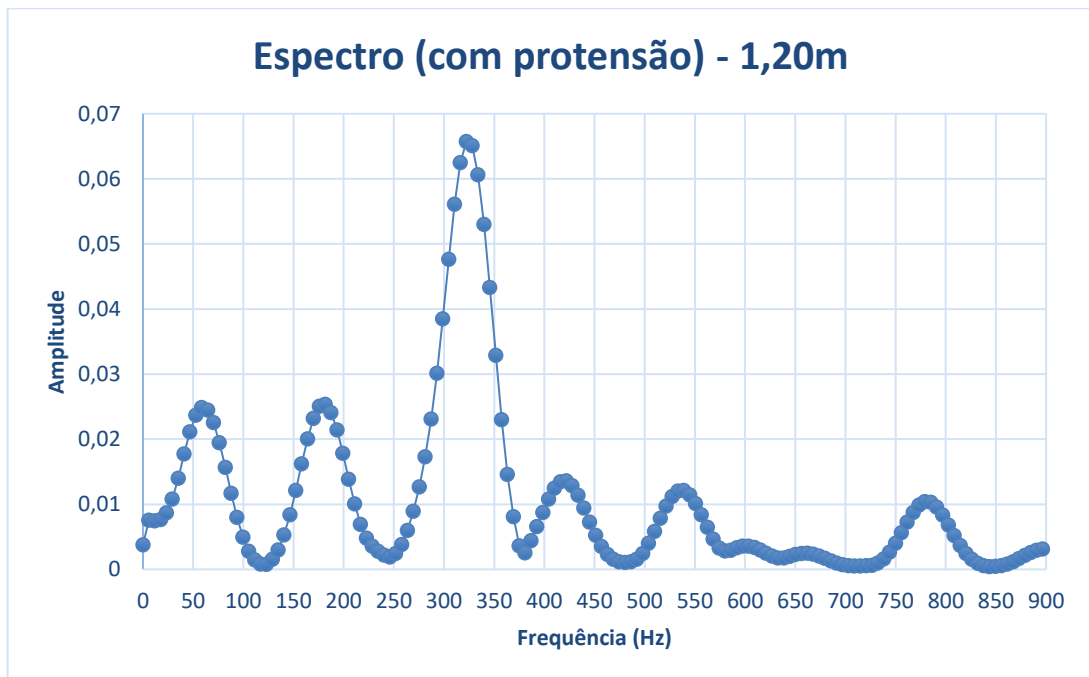
Fonte: Autoria Própria.

Figura 36 – Espectro de potência no local de batida 7 (com protensão).



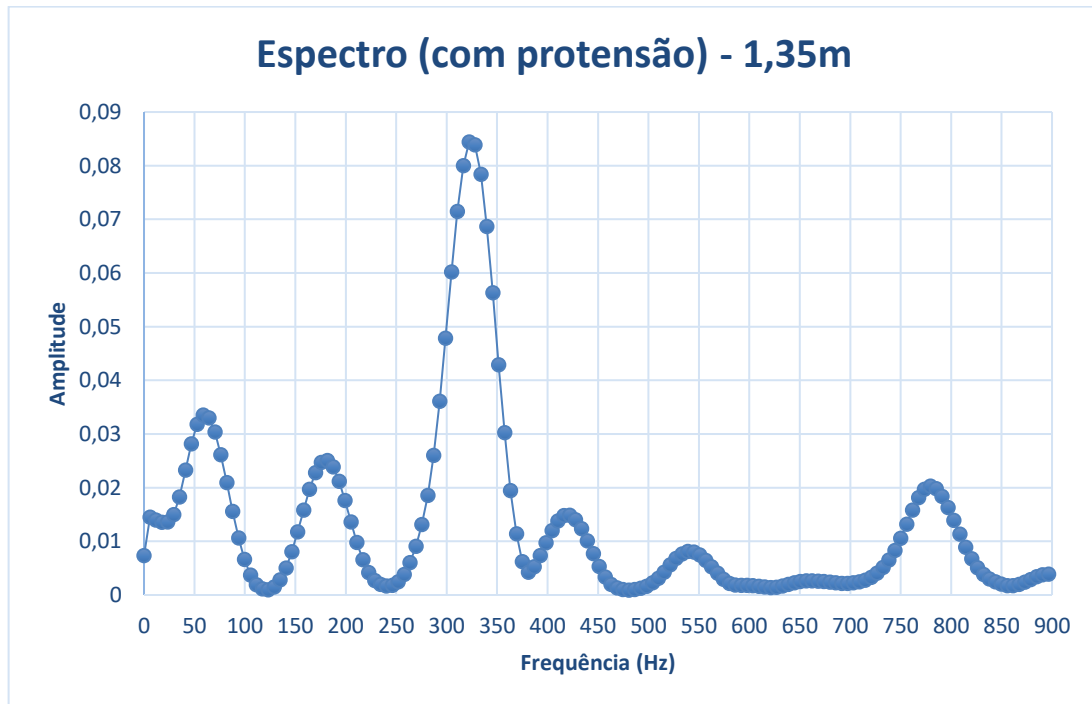
Fonte: Autoria Própria.

Figura 37 – Espectro de potência no local de batida 8 (com protensão).



Fonte: Autoria Própria.

Figura 38 – Espectro de potência no local de batida 9 (com protensão).



Fonte: Autoria Própria.

Nas tabelas 3 e 4, as células que não apresentam valores correspondem àqueles que não puderam ser identificados pelo programa, e em alguns casos a batida ocorreu em um ponto nodal daquele determinado modo de vibração. Nos locais 1 e 9, por exemplo, que são simétricos, pois se encontram a mesma distância do começo e do fim da viga, respectivamente, não foi possível identificar a terceira frequência natural em nenhuma das batidas, portanto podemos sugerir-se que, possivelmente, esses dois locais são pontos nodais do terceiro modo de vibração dessa viga. Isto também pode ser observado no local 5 (meio da viga), o programa não conseguiu identificar as frequências naturais nem do segundo nem do quarto modo de vibração, pois se trata também de um ponto nodal desses dois modos. Nos outros locais, às vezes não era possível identificar a frequência natural em algumas das batidas, mas não em todas, então nesses casos não foi possível determinar se eram nós ou se apenas o aparelho não conseguiu captar todos os valores.

Durante a construção dos espectros, foi notado, na maioria, um pico em torno dos 450 Hz, essa frequência não foi considerada pelo programa como frequência natural da viga, podendo ser alguma frequência parasita ou até mesmo uma frequência lateral ou de torção dela. Outro fato é que a frequência fundamental da viga em estudo se assemelha em valor da corrente elétrica, essa sendo de 60 Hz. Essa frequência é a mais importante a ser considerada em qualquer

estrutura, pois é com ela que os engenheiros devem ter cuidado para que as cargas atuantes na estrutura não atinjam esse valor.

Tabela 4 – Valores das frequências naturais, em Hz, da viga com protensão e suas médias.

<i>Local da batida</i>	<i>Ensaio</i>	<i>Frequência 1º modo</i>	<i>Frequência 2º modo</i>	<i>Frequência 3º modo</i>	<i>Frequência 4º modo</i>	<i>Frequência 5º modo</i>
1	1	60,239	180,287	-	-	790,11
	2	59,916	180,09	-	-	785,687
	3	60,002	-	-	-	783,71
	Média	60,05	180,19	-	-	786,50
2	1	59,98	180,033	324,846	538,727	781,815
	2	59,823	180,037	326,533	538,71	784,579
	3	60,041	180,614	326,752	-	784,94
	Média	59,95	180,23	326,04	538,72	783,78
3	1	59,953	-	324,329	-	775,124
	2	60,075	180,134	304,324	-	782,163
	3	59,886	180,059	306,944	-	771,512
	Média	59,97	180,10	311,87	-	776,27
4	1	60,066	180,002	304,174	-	781,103
	2	59,247	-	328,138	-	784,238
	3	60,101	180,109	-	-	782,233
	Média	59,80	180,06	316,16	-	782,52
5	1	60,035	-	324,627	-	788,156
	2	59,834	-	324,492	-	776,611
	3	60,562	-	324,559	-	772,924
	Média	60,14	-	324,56	-	779,23
6	1	60,171	-	325,856	530,84	-
	2	59,071	180,132	325,456	534,838	781,259
	3	59,821	180,365	321,38	-	775,239
	Média	59,69	180,25	324,23	532,84	778,25
7	1	59,407	-	325,727	537,351	782,074
	2	59,619	179,747	304,316	-	771,451
	3	59,788	179,441	327,236	-	774,581
	Média	59,60	179,59	319,09	537,35	776,04
8	1	60,071	179,998	324,368	537,188	782,64
	2	60,254	179,653	324,548	537,04	778,186
	3	59,906	180,017	323,778	-	781,739
	Média	60,08	179,89	324,23	537,11	780,86
9	1	59,878	179,93	-	537,873	794,875
	2	59,666	180,016	-	532,376	777,04
	3	60,485	180,483	-	536,6	783,506
	Média	60,01	180,14	-	535,62	785,14

Fonte: Autoria Própria.

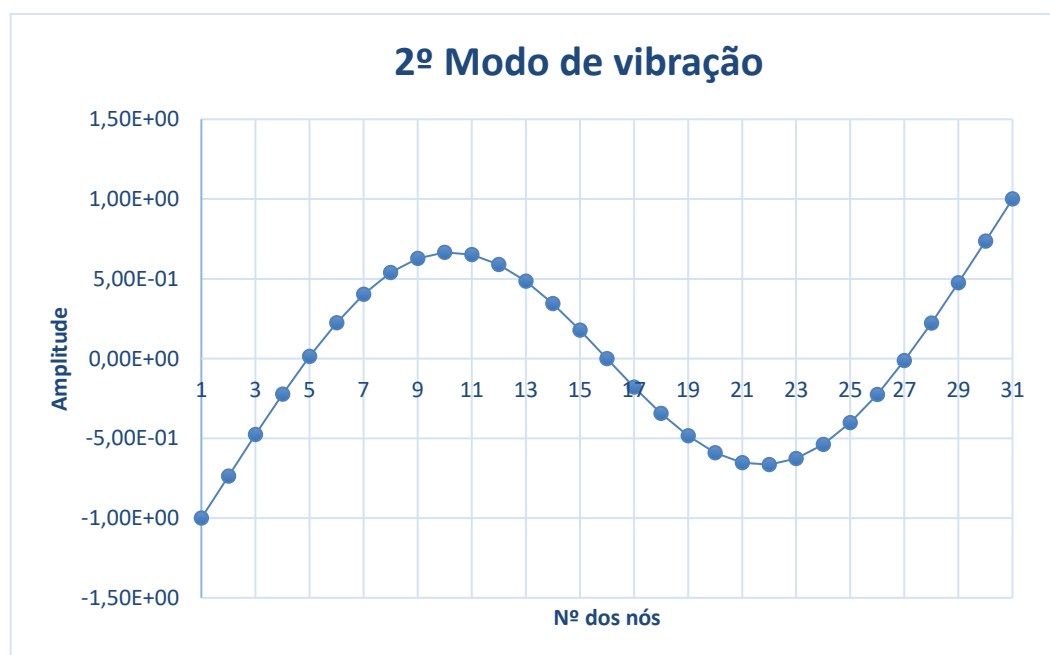
Pelo método numérico foram fornecidas as amplitudes para cada nó dos 30 elementos correspondentes à discretização da viga, gerando assim os 5 primeiros modos de vibração através do Excel. A diferença entre cada nó é de 10cm. Esses modos podem ser vistos nas figuras 39, 40, 41, 42 e 43.

Figura 39 – 1º modo de vibração da viga.



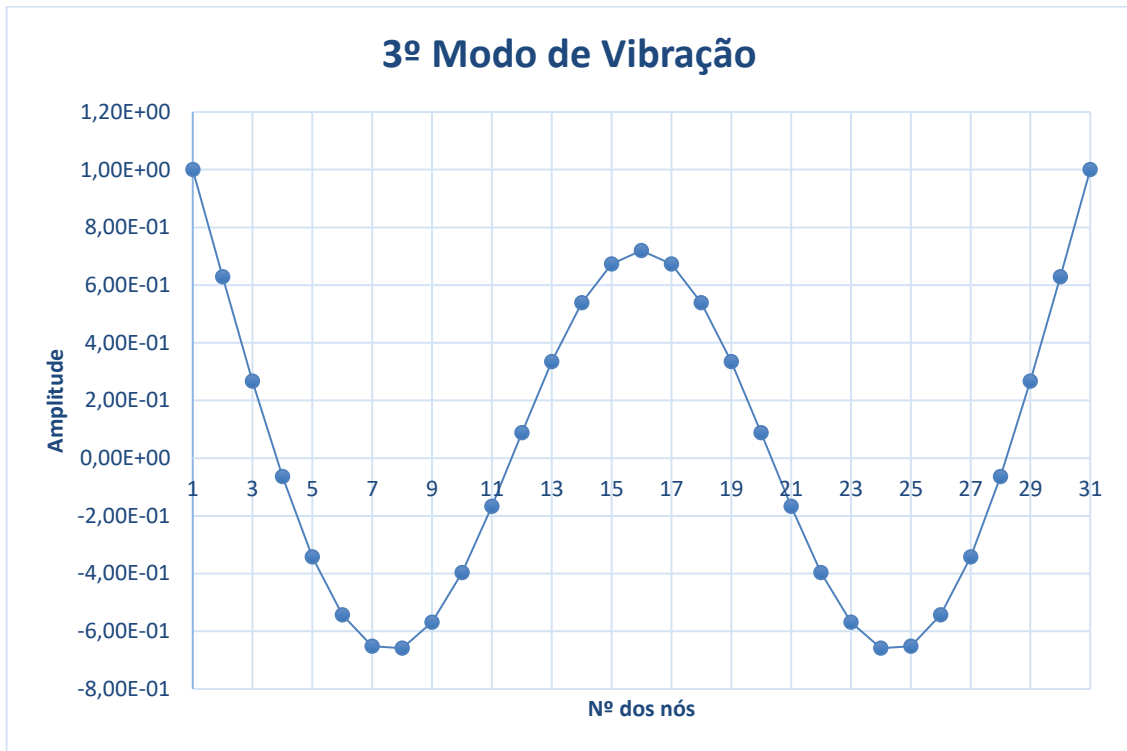
Fonte: Autoria Própria.

Figura 40 – 2º modo de vibração da viga.



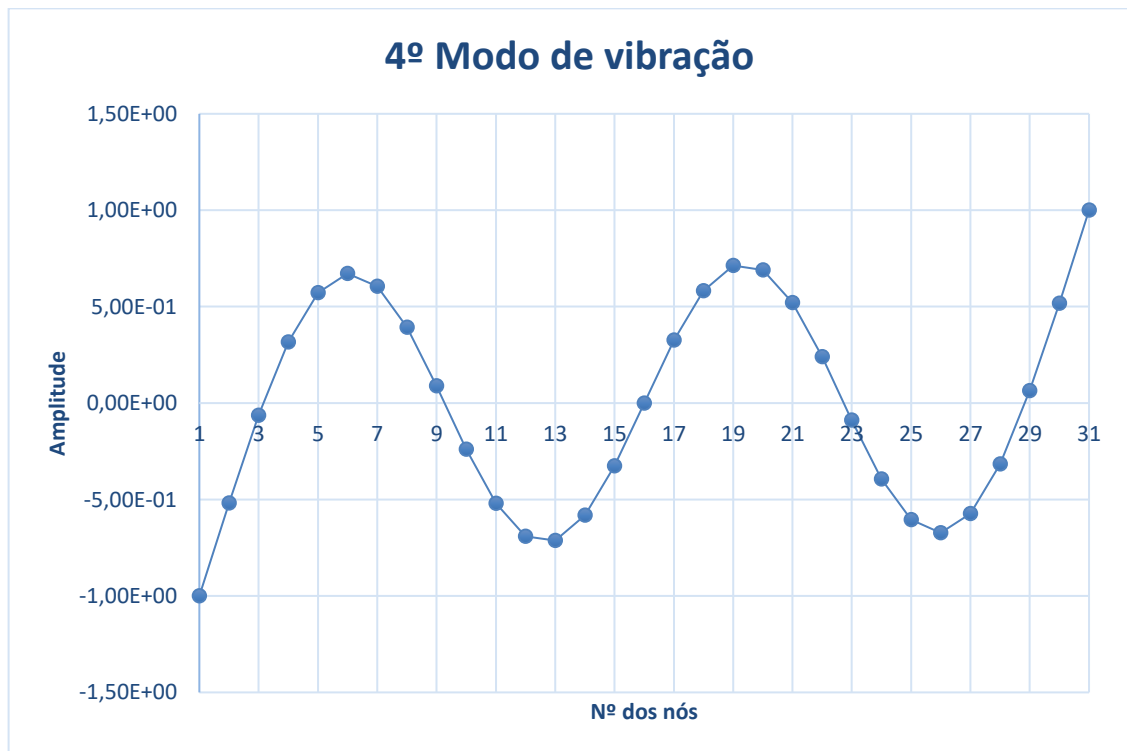
Fonte: Autoria Própria.

Figura 41 – 3º modo de vibração da viga.



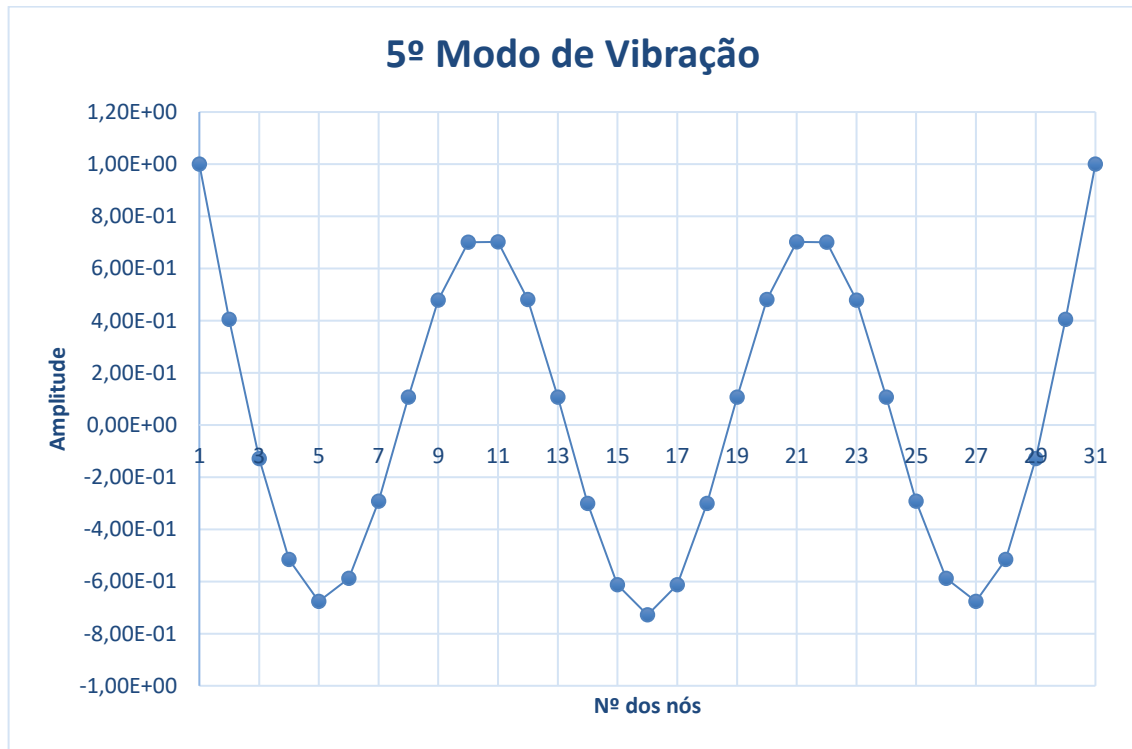
Fonte: Autoria Própria.

Figura 42 – 4º modo de vibração da viga.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 43 – 5º modo de vibração da viga.



Fonte: Autoria Própria.

Os valores das frequências pelo método numérico e uma comparação dos valores de todos os métodos para a viga não protendida podem ser encontrados na Tabela 5. Os valores do método experimental encontrados nessa tabela correspondem à média aritmética de todos os valores médios dos locais das batidas.

Tabela 5 – Comparativo entre os métodos para a viga sem protensão.

MODOS DE VIBRAÇÃO	FREQUÊNCIAS (HZ)		
	Método Analítico	Método Experimental	Método Numérico
1º	65,38	60,12	62,03
2º	180,23	179,60	170,59
3º	353,32	324,71	333,66
4º	584,05	543,32	550,29
5º	872,47	790,05	820,13

Fonte: Autoria Própria.

Os valores experimentais, foram menores que os calculados de forma analítica, isso possivelmente ocorreu devido a imperfeições na peça de aço, já que o local em que ela foi obtida não fornecia garantias de suas propriedades e medidas. Além dessas incertezas a viga

sofreu um pouco de alteração na preparação para a protensão, já que foram soldadas algumas peças nela, mudando um pouco a seção nas pontas da viga e no meio, onde foi soldado uma arruela para centralizar o cabo.

Outro fator que pode ter afetado os resultados do método experimental é que a viga é considerada livre-livre de apenas um vão, porém, para os ensaios, a viga ficava pendurada por dois fios de náilon, não sendo então 100% livre-livre.

O método numérico forneceu resultados coerentes com a viga em estudo. Ele apresentou valores mais próximos que o método analítico, considerando que as frequências do método experimental são as frequências reais da viga, apesar de todos os possíveis problemas que podem ter afetado um pouco os valores citados nos parágrafos anteriores.

Como citado anteriormente, durante o método experimental, os locais 1 e 9 não apresentaram valores para o terceiro modo de vibração. Pelo método numérico foram gerados as formas de como a viga vibrou. A viga para os ensaios foi dividida em 10 elementos, cada um com 15 cm, já para o método numérico a mesma foi dividida em 30 elementos de 5 cm. Com isso percebemos que, na Figura 41, a viga passa pelo seu eixo exatamente a 15 cm do seu começo e do seu fim, exatamente no valor que se encontram os locais 1 e 9, confirmando a suposição feita anteriormente aqui nos resultados.

Também foi feito um comparativo entre o método experimental para a viga com e sem protensão, Tabela 6.

Tabela 6 – Comparativo entre a viga sem e com protensão.

Frequências (Hz)		
MODOS DE VIBRAÇÃO	Sem Protensão	Com Protensão
1°	60,12	59,92
2°	179,60	180,06
3°	324,71	321,18
4°	543,32	536,33
5°	790,05	780,95

Fonte: Autoria Própria.

Com a protensão, exceto para o segundo modo de vibração, podemos perceber uma leve diminuição nas frequências dos modos de vibração da viga. Como citado por Blevins (2001), a viga submetida a uma carga de compressão apresenta frequências naturais menores que sem carga axial. A partir dos valores apresentados na Tabela 6, a diferença entre a viga com

protensão da mesma sem protensão foi de aproximadamente 0,73% menor. Essa variação está de acordo com a bibliografia (Blevins, 2001), que cita uma diferença em torno de 1%.

Não teve como medir a força aplicada a viga devido à falta de equipamentos para tal função. Também não foi possível aplicar uma maior força axial, já que esta foi feita manualmente através de um alicate e do esticador de cabo.

Pela Equação (4), quanto maior o módulo da carga de compressão (essa é uma carga negativa), menor seriam as frequências naturais da viga, então pode-se deduzir que se fosse possível aplicar uma carga maior, provavelmente, a diferença entre a viga protendida e não protendida provavelmente seriam maiores que as apresentadas nesses resultados.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo propôs fazer uma comparação do cálculo das frequências naturais entre três métodos distintos, o analítico, o experimental e o numérico. Além disso, também foi proposto fazer um comparativo entre a viga com e sem protensão, e a verificação da técnica baseada na resposta acústica da estrutura para determinação de suas frequências naturais de vibração.

Foi possível concluir que, através dos resultados experimentais (frequências reais da estrutura), os métodos analítico e numérico são aproximações que fornecem valores bem próximos da realidade, ou seja, são métodos que podem ser utilizados quando se precisar estimar alguma frequência para um elemento estrutural que não seja possível a realização de algum ensaio. O método numérico apresentou resultados mais próximos a realidade que o método analítico, apesar de serem relativamente pequenas as diferenças.

Com relação a comparação entre uma viga com e sem protensão, podemos inferir que vigas submetidas a cargas axiais de compressão apresentam frequências naturais menores em relação a vigas sem cargas de protensão. Como, hoje em dia, a protensão vem sendo uma solução cada vez mais utilizada no Brasil, aliada a peças cada vez mais esbeltas, é necessário um maior cuidado dos engenheiros com relação as vibrações das peças estruturais que estejam sujeitas a esse efeito. Mesmo essa diminuição nos valores das frequências ficando em torno do 1%, esse cuidado justifica-se a fim de evitar que todas as formas que a estrutura entre em colapso por esse motivo.

Ainda, com relação aos resultados experimentais pode-se verificar que a técnica baseada na resposta acústica da estrutura é válida para determinação de suas frequências naturais. No entanto, vale ressaltar que para o uso dessa técnica as frequências não podem ser muito baixas e é necessária uma base de valores para tomar como referência, podendo ser os resultados obtidos por programas computacionais ou a respostas analíticas.

Para preparar melhor os engenheiros para todas as situações, não só as estruturas protendidas, as universidades deveriam abordar esses temas em sua graduação, como citado na introdução desse trabalho, para dar uma sensibilidade aos profissionais com relação a não só esse tema, mas com relação a qualquer problema dinâmico que possa ocorrer, como fadiga, etc.

Espera-se que esse trabalho possa incentivar de alguma forma a Universidade Federal da Paraíba a adotar essas mudanças na grade curricular a fim de tornar os profissionais,

formados por ela, melhores e mais capazes de lidarem com os problemas que podem ser gerados por cargas dinâmicas, como citado anteriormente.

Como sugestão de trabalhos futuros, poder-se-ia tentar verificar os pontos nodais de cada modo de vibração através dos ensaios e também causar alguns danos à peça estrutural para averiguar como seriam afetadas as frequências naturais da mesma, eles não foram tratados nesse trabalho por falta de tempo.

REFERÊNCIAS

1. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *ABNT NBR 6118:2014: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. 3ª Ed. Rio de Janeiro. 2014.
2. ASSUNÇÃO, T. M. R. C. *Considerações sobre efeitos dinâmicos e carregamentos induzidos por fontes de excitação em estruturas industriais*. 2009. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2009. Disponível em: < http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/BUOS-8CJMRR/dissertacao_tania.pdf?sequence=1 >. Acesso em: 02 de maio, 2017.
3. BLEVINS, R. D. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Reprint Edition. Malabar Florida: Krieger Publishing Company, 2001. 492 p.
4. BOLINA, C. C. *at al*. Vibrações: As frequências naturais estimada e experimental de uma estrutura. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA À INDÚSTRIA, 2014, Caldas Novas, Goiás. Disponível em: < <http://www.proceedings.blucher.com.br/article-details/vibraes-as-frequncias-naturais-estimada-e-experimental-de-uma-estrutura-11900> >. Acesso em: 02 de maio, 2017.
5. BRASILIANO, Andrea (2001). Caracterização de Danos em Estruturas Aporticadas. Dissertação de Mestrado, Publicação Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 109 p.
6. CLOUGH, Ray W. (1993). *Dynamics of structures. International Editions*. Singapore: McGraw-Hill Book Co., 1993.
7. Controle de vibrações: *Millennium Bridge*. Revista Polytech. 2015. Disponível em: < <http://www.polyteck.com.br/uncategorized/millennium-bridge/> >. Acesso em: 14 de maio, 2017.
8. LIMA, S. S.; SANTOS, S. H. C. *Análise dinâmica das Estruturas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2008. 171.
9. MOEHLECKE, R. *Fim das interdições da ponte Rio-Niterói*. Disponível em: < http://www.cienciahoje.org.br/noticia/v/ler/id/323/n/fim_das_interdicoes_na_ponte_rio-niteroi >. Acesso em: 27 de maio, 2017.